

2.4. RESUME DU COURS

2.4.1. Fonction logarithme népérien

Domaine de définition et dérivée

➤ Soit u une fonction ; $\ln u(x)$ existe ssi $u(x)$ existe et $u(x) > 0$.

➤ Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \rightarrow \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et $[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Remarque : $[\ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Propriétés Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$.

➤ $\ln ab = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

➤ $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$; $\ln a^r = r \ln a$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$.

➤ $\ln a = \ln b$ ssi $a = b$;

➤ $\ln a < \ln b$ ssi $a < b$; $\ln a > \ln b$ ssi $a > b$.

➤ $\ln x < 0$ ssi $0 < x < 1$; $\ln x > 0$ ssi $x > 1$.

Limites

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

➤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Fonction logarithme décimal

➤ La fonction logarithme décimal est la fonction notée \log et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

2.4.2. Fonctions exponentielles

Domaine de définition et dérivée

➤ Soit u une fonction ; $e^{u(x)}$ existe ssi $u(x)$ existe.

➤ Si u est dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et $[e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$.

Propriétés Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}^*$

➤ $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^r = e^{ar}$;
 $e^0 = 1$; $e^1 = e$.

➤ $e^a = e^b$ ssi $a = b$.

➤ $e^a < e^b$ ssi $a < b$; $e^a > e^b$ ssi $a > b$.

➤ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

➤ $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$; $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$.

- $\forall a > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{x \ln a}$.
- $y = e^x$ ssi $x = \ln y$.

Limites

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Racine n.ieme Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{1-\frac{1}{n}}$.
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ ssi $x = y$.
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ ssi $x < y$; $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ ssi $x > y$.
- $y = \sqrt[n]{x}$ ssi $x = y^n$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Fonctions puissances

On appelle fonction puissance, toute fonction f_α définie sur $]0; +\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Croissance comparée

- Soit α un nombre rationnel strictement positif
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

➤ Soit n un entier naturel non nul ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty$.

Remarque : Pour les quotients dont on a calculés la limite à $+\infty$, la limite de leurs inverses à $+\infty$ est égale à 0 ; en particulier $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.

2.5. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Résoudre :

1) $\ln(2x-5) + \ln(1+x) = 2\ln 2$. 2) $2\ln x + 3 = 0$.

3) $(\ln x)^3 - \ln x^3 = -2$. 4) $\ln x - \ln(2-x) \geq 0$. 5) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \leq 0$.

6) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0$. 7) $e^2 e^{-x} - e^{x^2-4} = 0$.

8) $e^x - 2e^{-x} = -1$. 9) $(e^{x-1})^4 \geq e^{x^2}$.

10) $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 5 \\ \ln x + 2\ln y = -1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} e^x \cdot e^y - e^5 = 0 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$.

Exercice 2

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f , les limites aux bornes de D_f , la dérivée $f'(x)$ et le tableau de variation de f .

1) $f(x) = x \ln x - x$. 2) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. 3) $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$.

4) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. 5) $f(x) = -2x + 1 + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$. 6) $f(x) = x + e^{-x}$.

$$7) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}. \quad 8) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad 9) f(x) = x - \ln(1 + e^x).$$

Exercice 3

Soit la fonction f , $f(x) = \ln(\cos x)$ et C_f sa courbe.

1. Etudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et dresser son tableau de variation.

2. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$.

b) Soit la fonction g , $g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$; montrer que C_g la courbe de g peut se déduire de C_f par une transformation simple à préciser.

Exercice 4

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Définir ce prolongement.

B. On considère la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \text{ et (C) sa courbe dans un repère}$$

orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier la dérivabilité de g sur $[0; +\infty[$.

2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[1; +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ?

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $h^{-1}(x) = e$.

d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente en 0).

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. Montrer que (C) coupe la droite $\Delta : y = x$ en un unique point d'abscisse α appartenant à $[1 ; \frac{3}{2}]$.

3. Tracer (C).

4. a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur $] \frac{1}{2} ; +\infty[$.

b) Déterminer l'image de l'intervalle $]0 ; \alpha]$ par f^{-1} .

5. Déduire du tracé de (C) la courbe de la fonction g définie par $g(x) = |2x+1|e^{-x}$.