Chapitre 14

Théorie Des Graphes

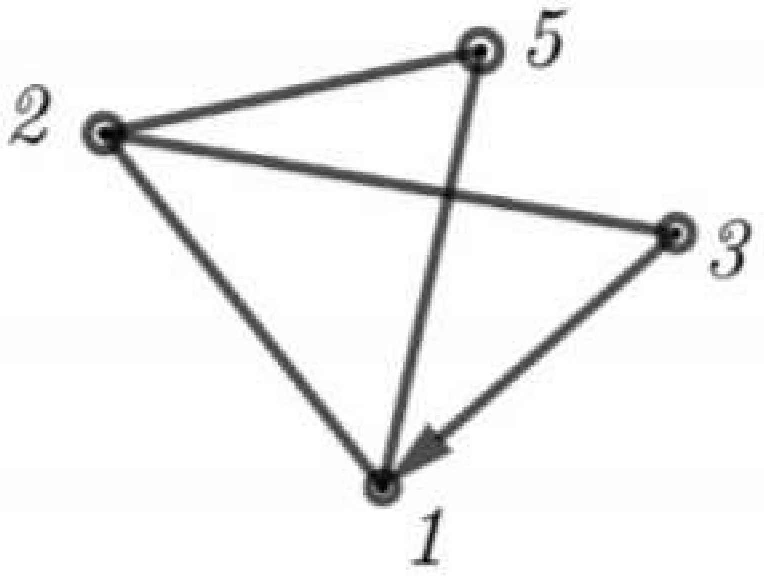
Motivation

Pour résoudre de nombreux problèmes concrets, on est amené à tracer sur le papier des petits dessins qui représentent (partiellement) le problème à résoudre. Bien souvent, ces petits dessins se composent de points et de lignes continues reliant deux à deux certains de ces points. On appellera ces petits dessins des graphes, les points des sommets et les lignes des arcs ou arêtes, selon que la relation binaire sous-jacente est orientée ou non.

Leçon 1 Graphe partiel et sous-graphe 100mn

Objectif pédagogique : Justifier qu'une partie d'un graphe est un sous-graphe ou un graphe partiel .

Contrôle des prérequis

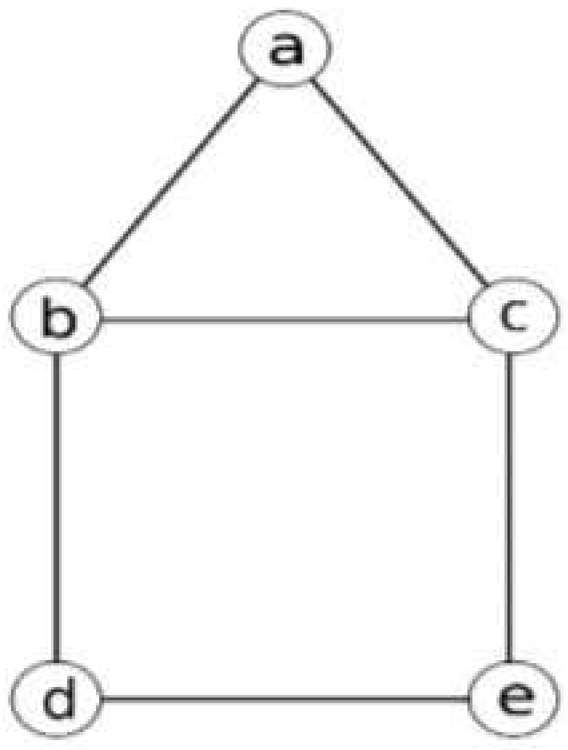


Dessiner le graphe défini par les arêtes $\{1\ ;\ 2\}, \{1\ ;\ 3\}, \{1\ ;\ 5\}, \{2\ ;\ 5\}$ et $\{3;\ 2\}$.

Solution

Activités D'apprentissage

On considère le graphe G ci-contre.



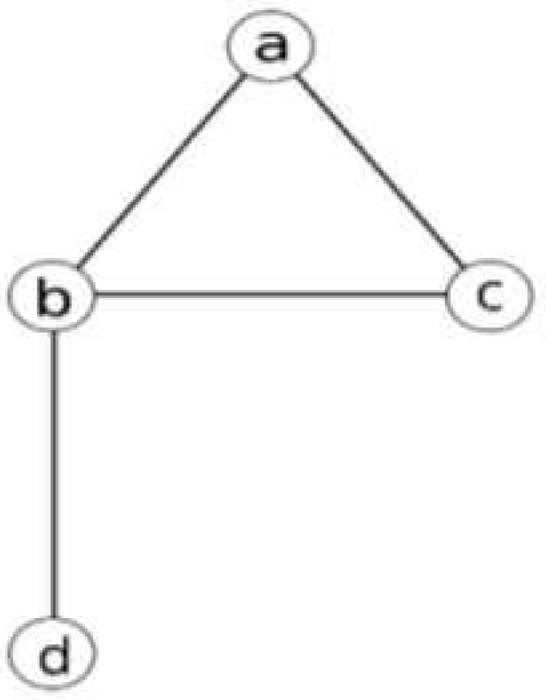
a-Donne l'ensemble S de ses sommets puis l'ensemble A des arêtes de G.

$S = \{a\ ;b\ ;c\ ;d\ ;e\}\ ;\ A = \{\{a\ ;\ b\}, \{a\ ;\ c\}, \{b\ ;\ c\}, \{b\ ;\ d\}, \{d\ ;\ e\}, \{c\ ;\ e\}\}$

b- Supprime le sommet e et les arêtes qui lui sont adjacentes puis reproduis le graphe G' obtenu. Donne l'ensemble S'des sommets de G'.

Que représente l'ensemble S'des sommets de G' pour S ?

Que représente le graphe G' pour le graphe G ?



$S' = \{a\ ;b\ ;c\ ;d\}$ est un sous-ensemble de S. On dit que le graphe G' est un sous graphe du graphe G.

Il faut remarquer par ailleurs que l'ensemble A' des arêtes de G' est un sous-ensemble de l'ensemble A des arêtes de G.

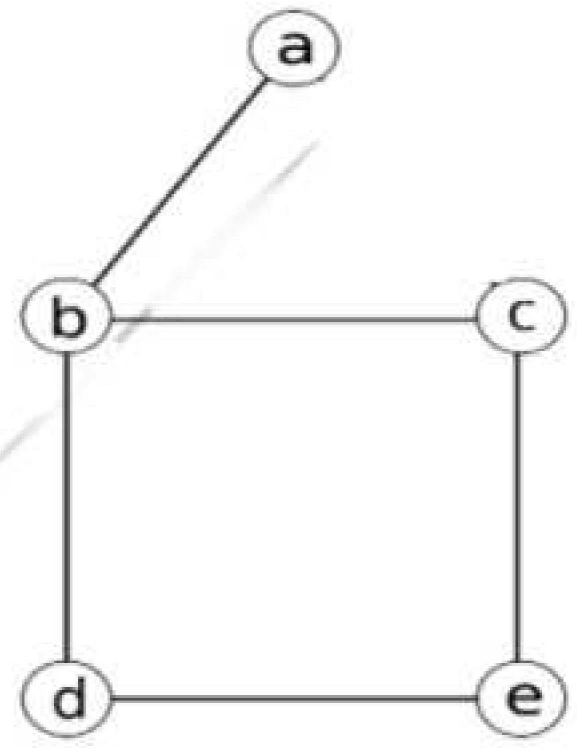
c- Maintenant supprime une arête du graphe G puis reproduis

le graphe G'' obtenu.

Donne l'ensemble S''des sommets de G'' puis l'ensemble A'' des arêtes de G''.

Que représente l'ensemble A'' des arêtes de G'' pour l'ensemble A des arêtes de G ?

Que représente le graphe G'' pour le graphe G ?



Supprimons par exemple l'arête $\{a\,;\,c\}$.

$S'' = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\} = S\,;$

$A'' = \{\{a\,;\,b\},\{b\,;\,c\},\{b\,;\,d\},\{d\,;\,e\},\{c\,;\,e\}\} \subset A$

On dit que G'' est un graphe partiel de G.

Résumé

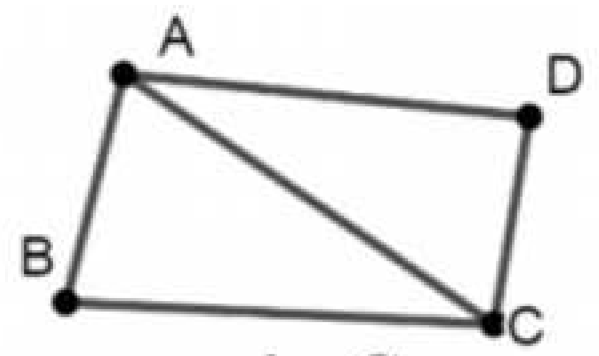
Soit G = (S ; A) un graphe. S est l'ensemble des sommets de G et A l'ensemble de ses arêtes.

D1- Un sous-graphe du graphe G est tout graphe G' dont l'ensemble S' des sommets est un sous-ensemble de S et dont les arêtes sont ceux de G reliant deux éléments de S'.

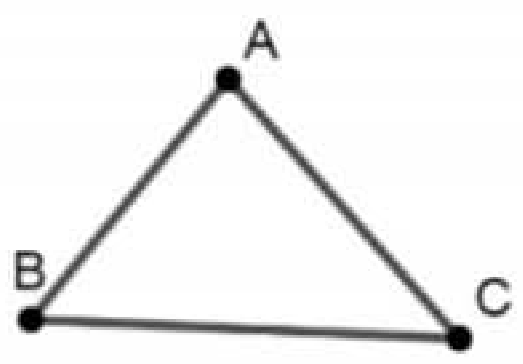
D2- Un graphe partiel de G est un graphe ayant pour sommets tous les sommets de G et pour arcs/arêtes seulement un sous-ensemble de A.

Autrement dit, c'est tout graphe obtenu en supprimant uniquement une ou plusieurs arêtes de G.

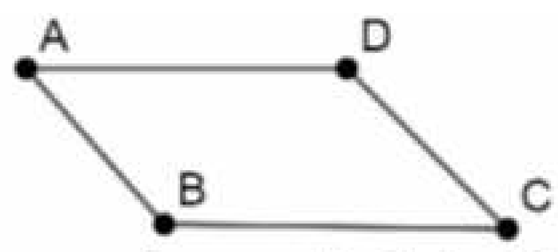
Exemple



graphe G

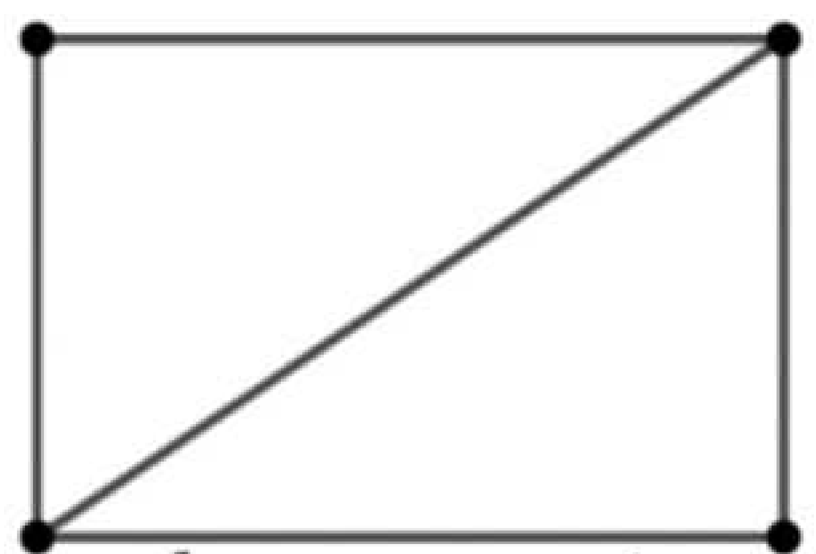


Sous graphe de G

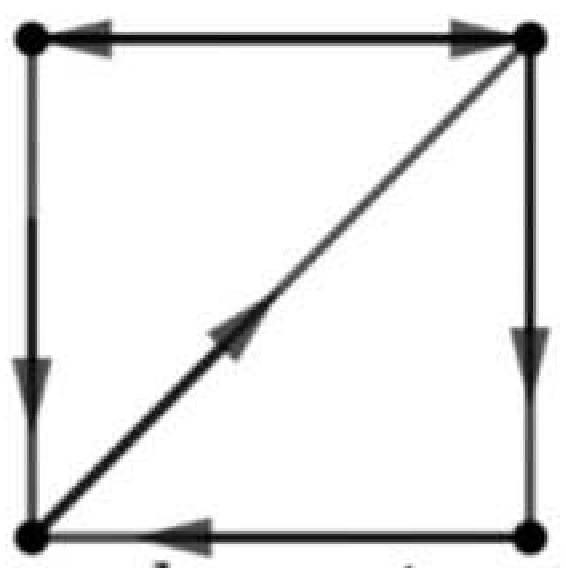


graphe partiel de G

D3 Un graphe est dit orienté si ses arêtes sont des arcs orientés ; dans le cas contraire le graphe est dit non orienté. (Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.)

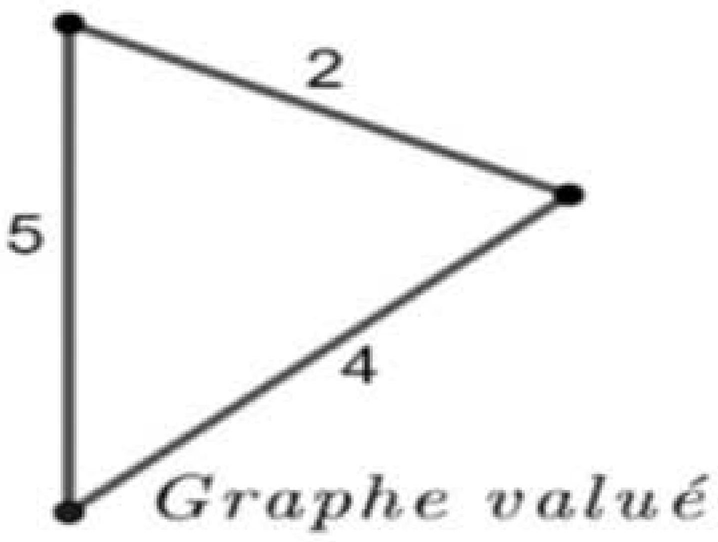


graphe non orienté



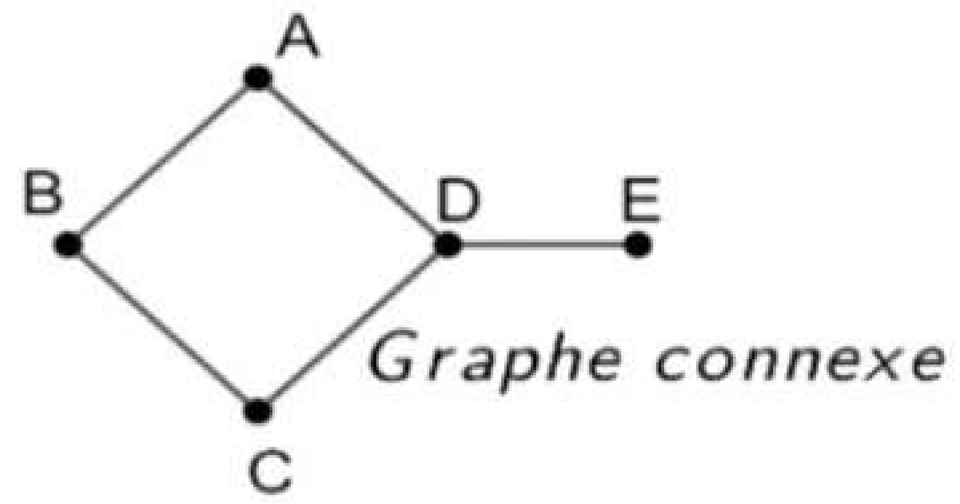
graphe orienté

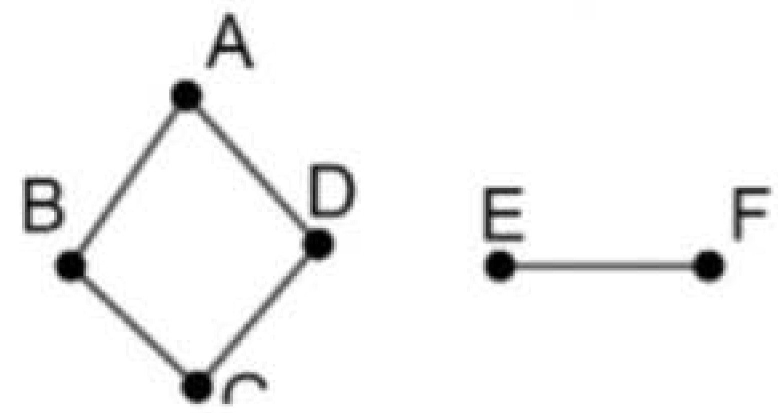
D4 Un graphe valué est un graphe dans lequel chaque arête est associée à un nombre réel appelé poids. Si ce nombre est positif, on parle alors de graphe pondéré.



D5 Un graphe est connexe s'il existe une chaine reliant chaque paire de sommets de ce graphe.

Exemple

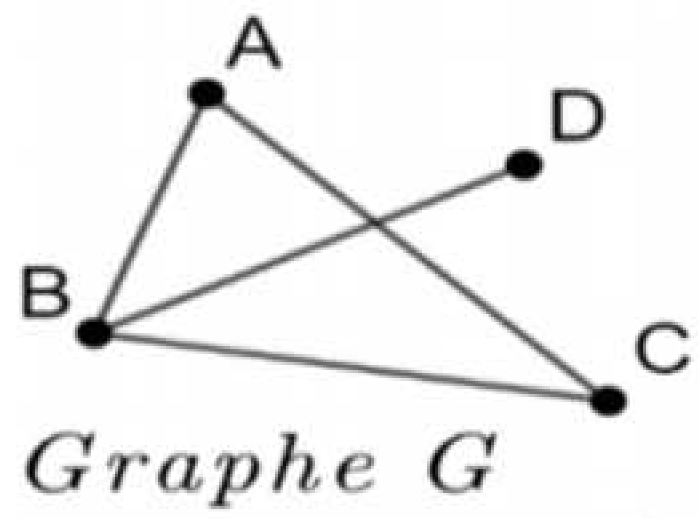


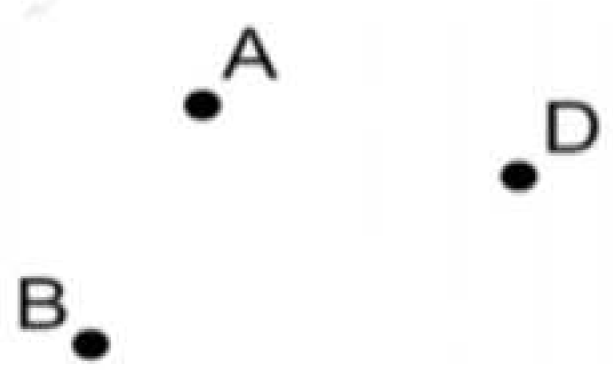


Il n'existe pas de chaine reliant les sommets D et E.

Sous graphe particuliers.

- Un **stable** est un sous-graphe de G qui ne contient aucune arête.

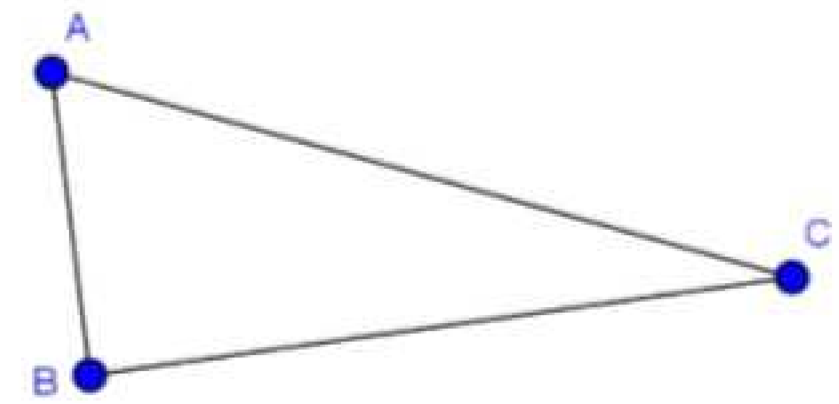




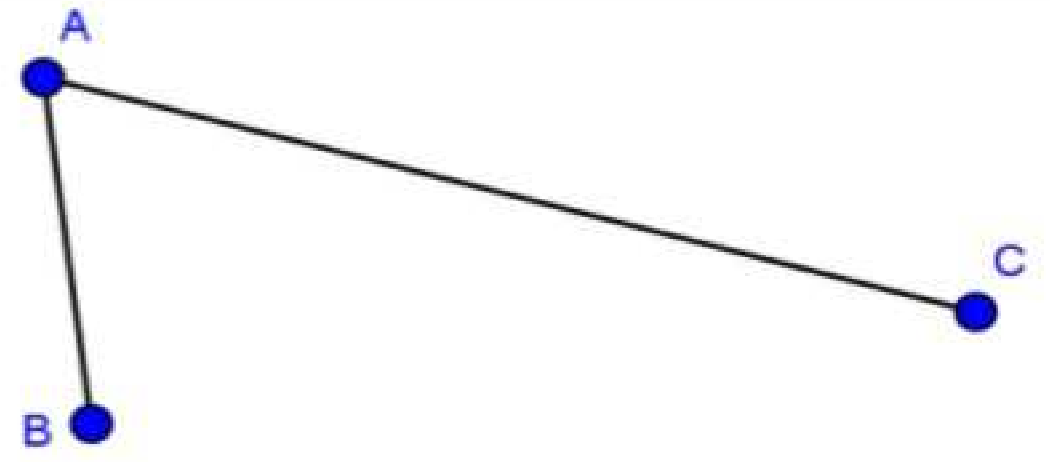
Un stable de G

- Une clique est un sous graphe complet de G.
- Un sous-graphe G' d'un graphe G est dit **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents

Une clique de G



- Un sous-graphe partiel d'un graphe G est un graphe partiel d'un sous-graphe de G.



Ce graphe est un sous-graphe partiel du graphe G, car graphe partielle de la clique de G ci-dessus.

Application :

1. Choisis la bonne réponse.

a-Qu'est qu'un sous graphe ?

□ Le graphe initial privé de quelques arêtes

□ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes *

□ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive

en suite de quelques arêtes.

b- Qu'est qu'un graphe partiel ?

□ Le graphe initial privé de quelques arêtes *

□ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

□ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive

en suite de quelques arêtes.

c- Qu'est qu'un sous graphe partiel ?

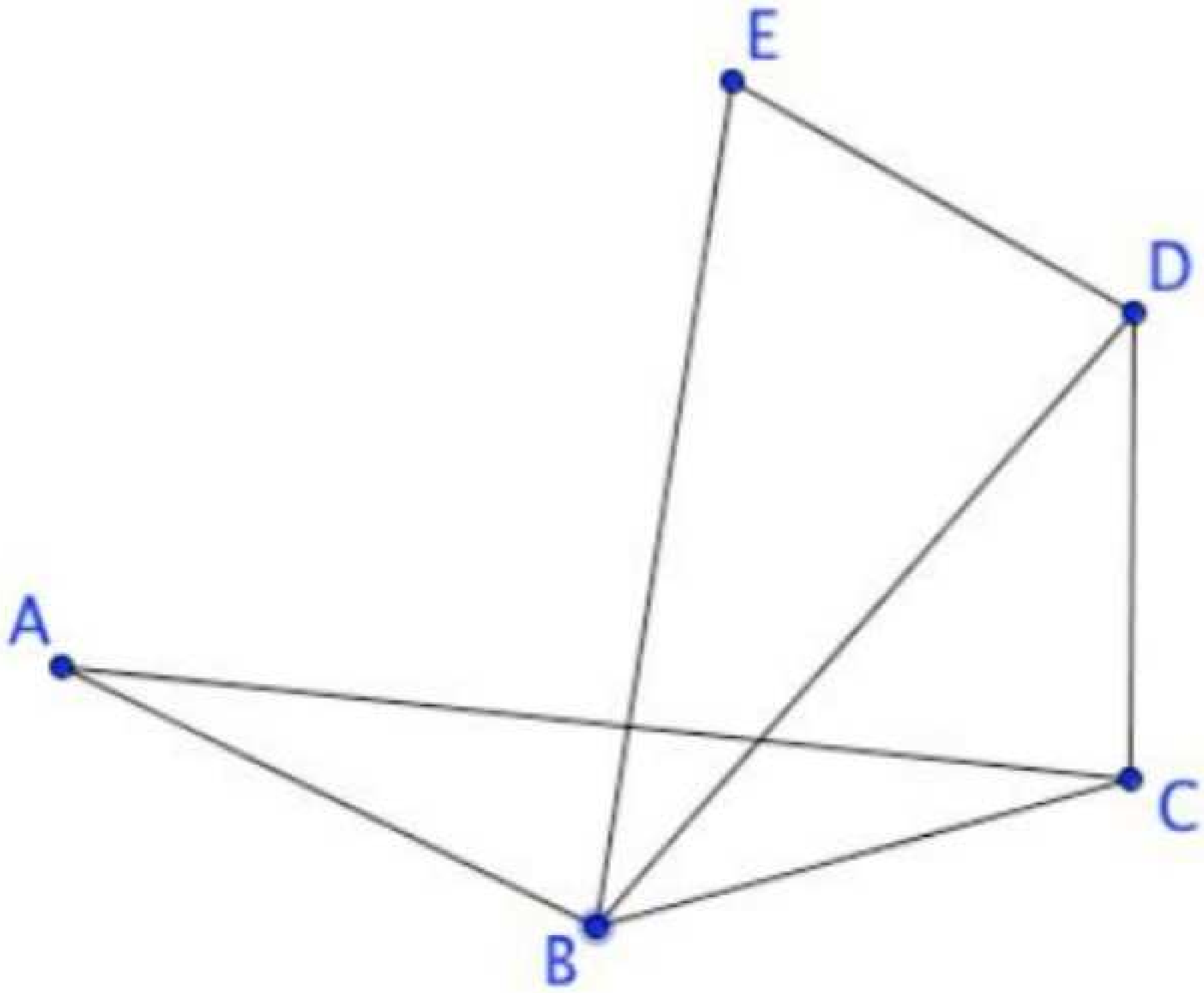
□ Le graphe initial privé de quelques arêtes

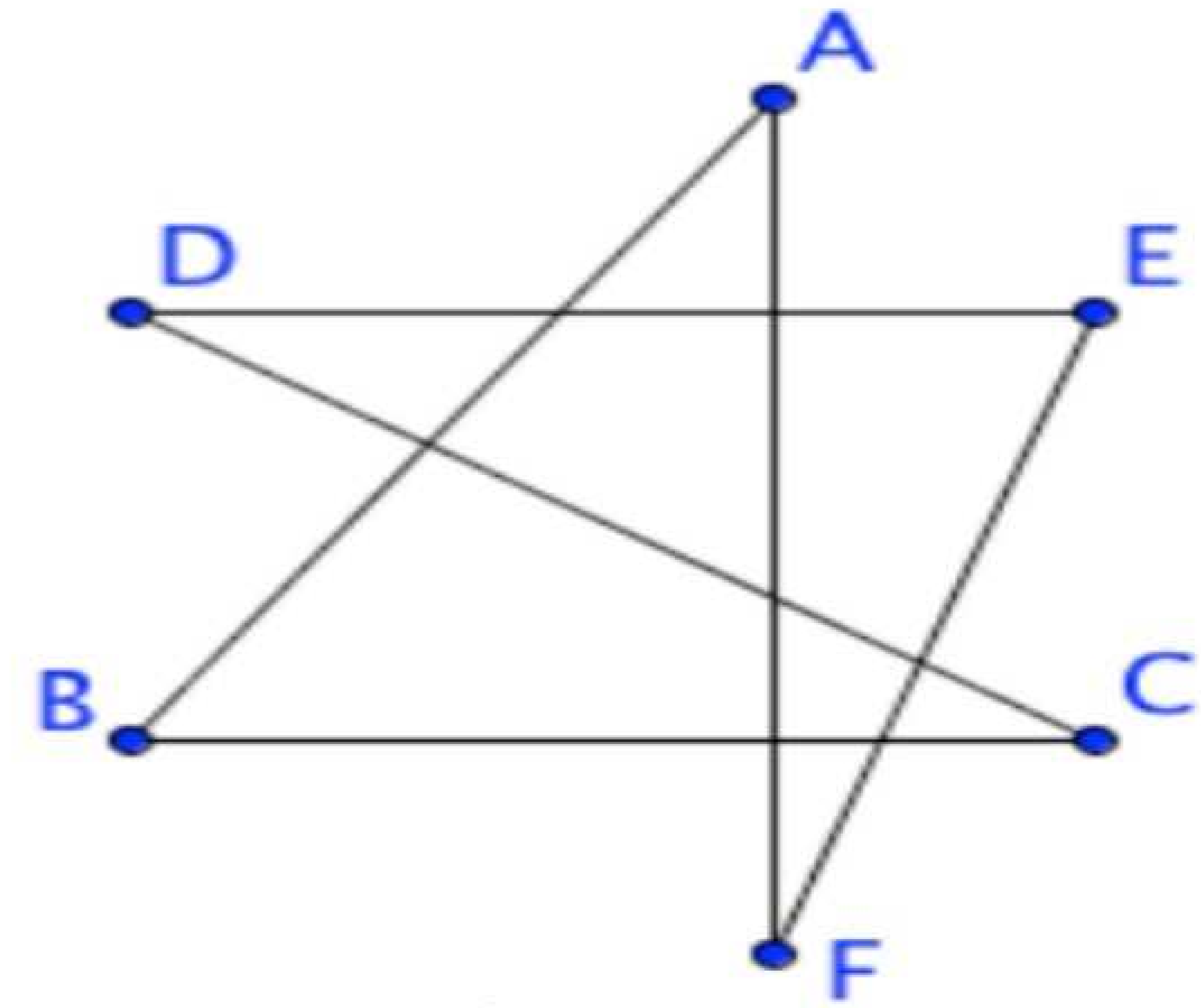
□ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

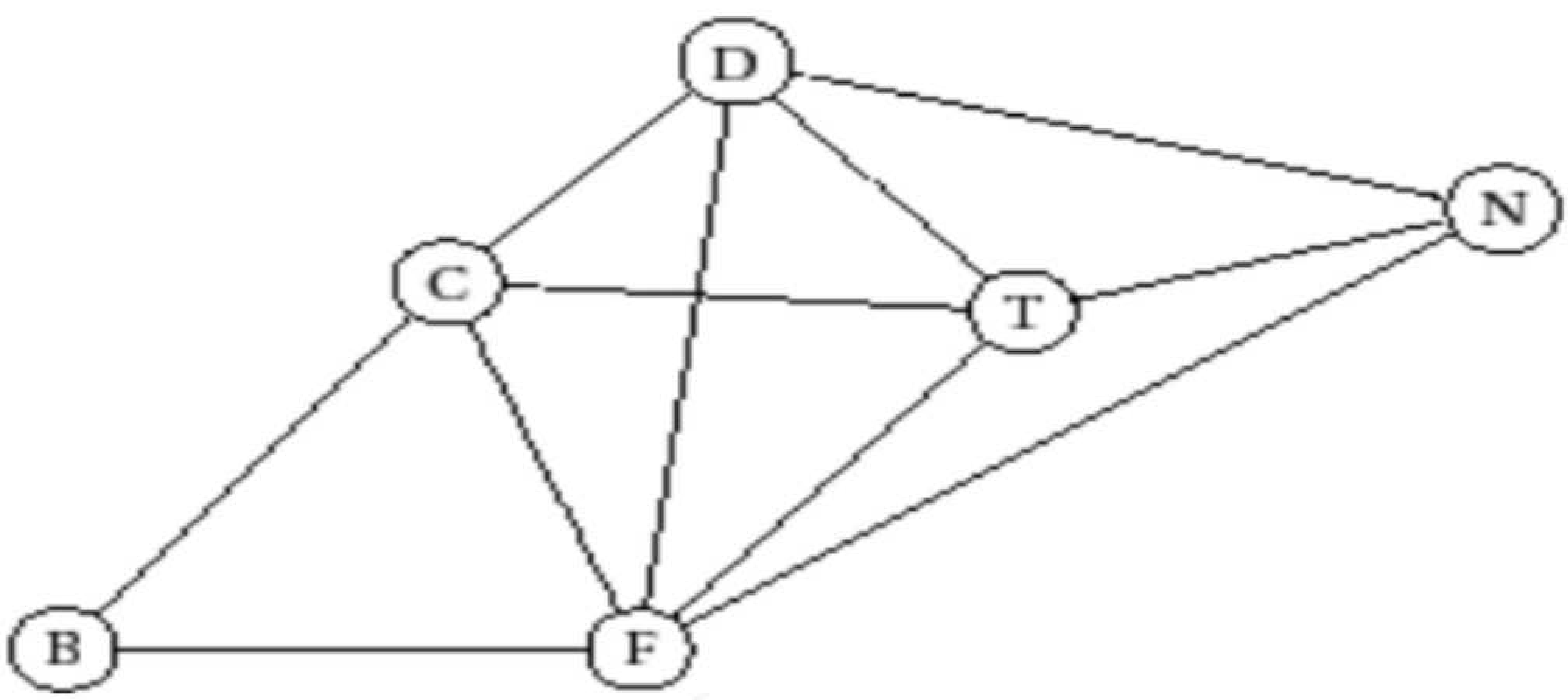
□ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive

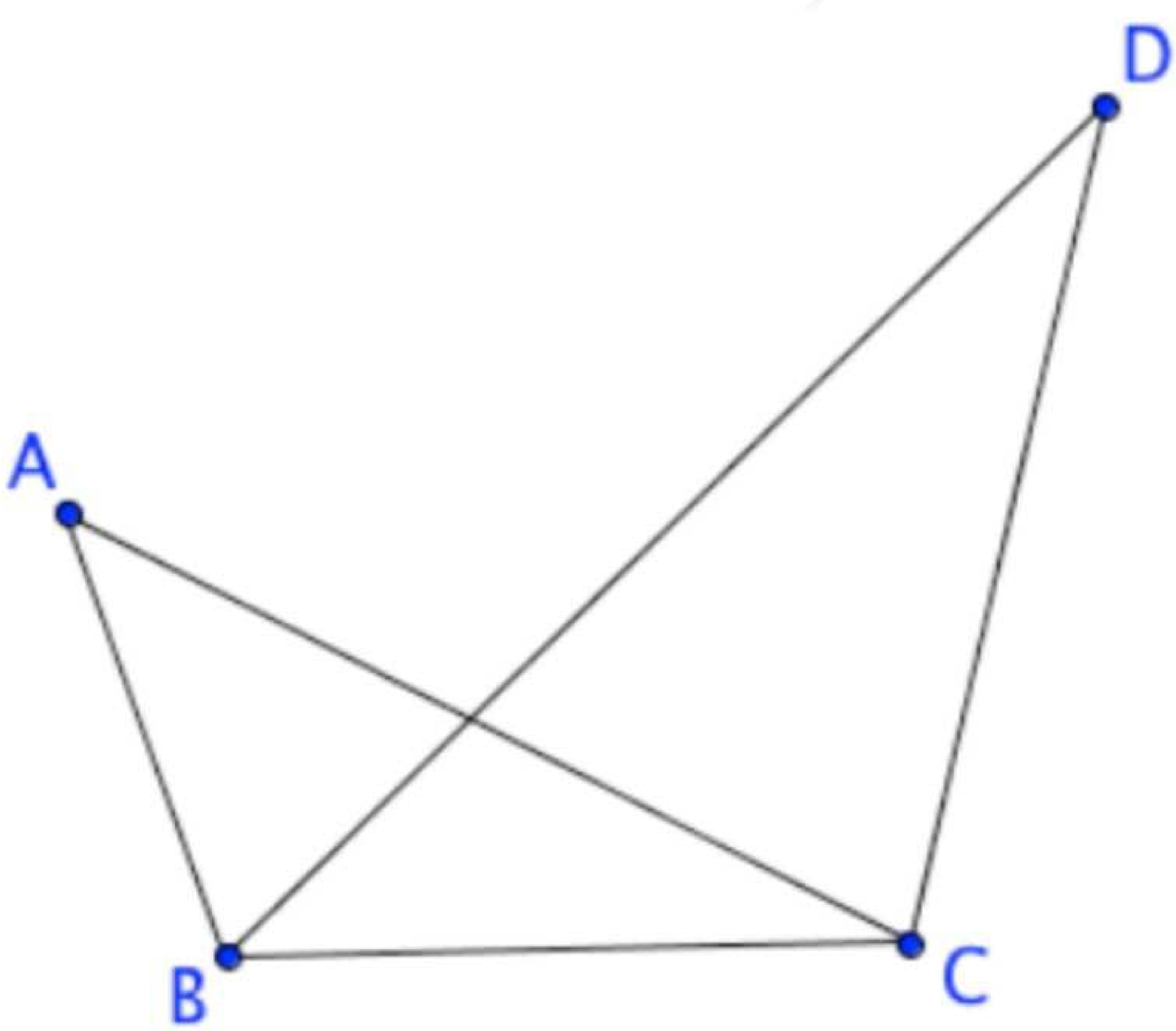
en suite de quelques arêtes.

2-Détermine pour chacun des graphes ci-dessous, un sous graphe, un graphe partiel, un sous graphe partiel et un sous graphe complet.


E
D
A
C
B

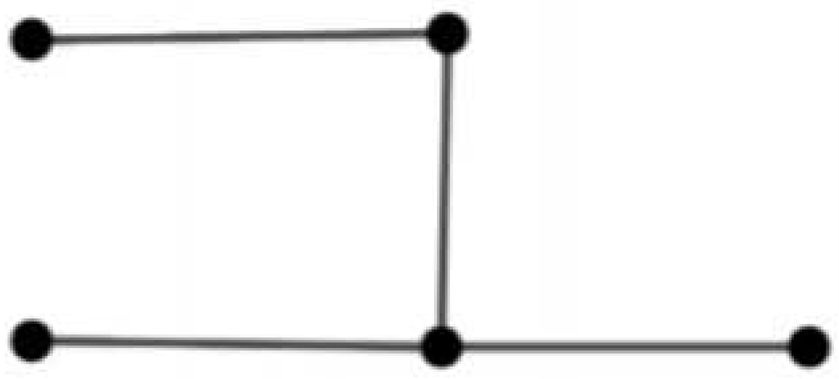

A
D
E
B
C
F


D
N
C
T
B
F

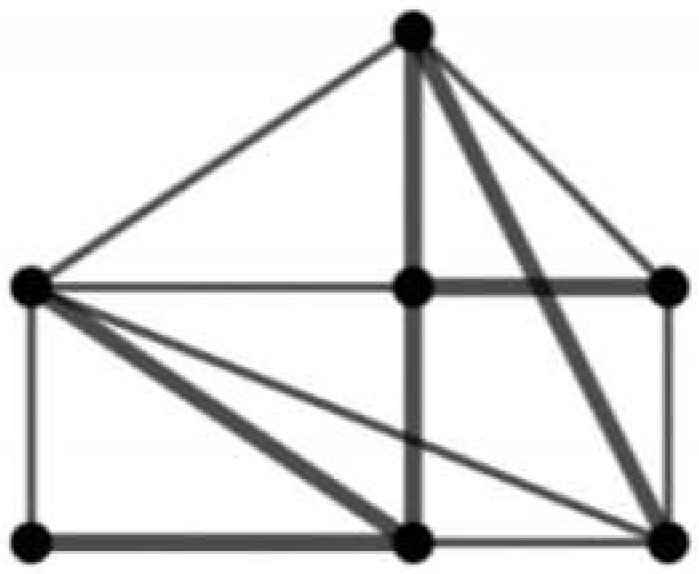

D
A
B
C

Les graphes étudiés dans cette partie sont non orientés.

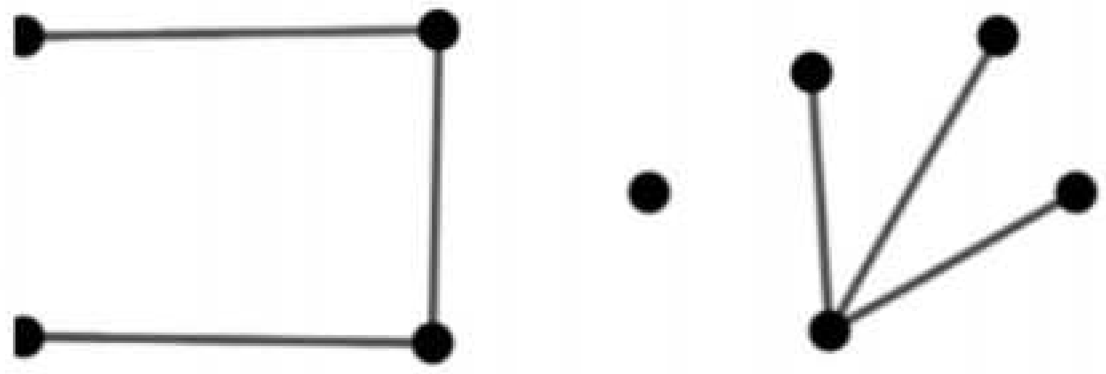
- Un arbre est un graphe connexe et sans cycle (acyclique).
- Une forêt est un graphe sans cycle : c'est une collection d'arbres
- Un arbre couvrant (ou sous-graphe couvrant) d'un graphe G est un graphe partiel qui est un arbre.



un arbre



En gras, un arbre couvrant



une forêt

Propriétés

P1. Un graphe connexe d'ordre n a au moins $n-1$ arêtes.

P2. Un graphe d'ordre n qui a au moins n arêtes possède un cycle.

P3. Un graphe G est un arbre si et seulement si

-G est connexe et le nombre d'arêtes est égale au nombre de sommets moins un.

-G est connexe et si on lui retire une arête, il n'est plus connexe (connexe minimal).

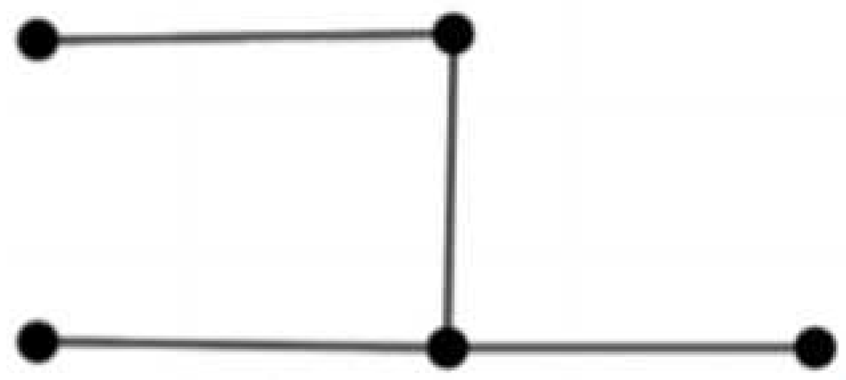
-G est sans cycle et si on lui rajoute une arête, on forme un cycle(acyclique maximal).

Exemple.

Se servir de cette figure pour illustrer

Cette caractérisation des arbres donnée par

la propriété P3 ci-dessus.



P4. Un graphe G est connexe si et seulement s'il admet un arbre couvrant.

Comment déterminer un arbre couvrant un graphe donné ?

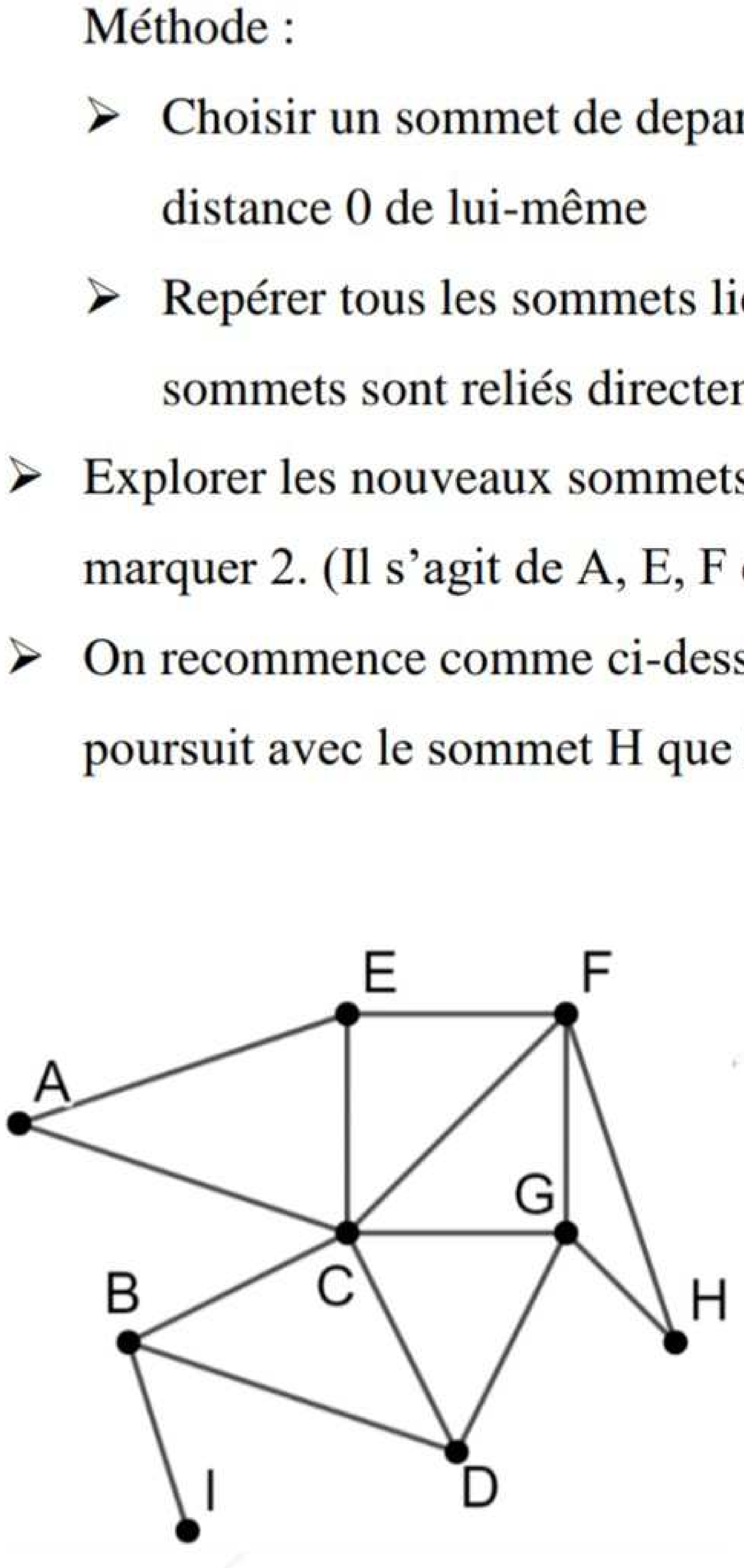
L'algorithme de parcours en largeur BFS (Breadth First Seach) permet de déterminer facilement un arbre couvrant dans un graphe G donné (lorsque G est connexe, voir P4.).

Le principe du BFS ou parcourt en largeur est de se fixer un sommet initial marqué 0 (à partir duquel on va parcourir le graphe) puis de visiter et marquer 1 tous les voisins de ce sommet initial avant de visiter par suite les sommets voisins à ceux marqués 1, qui n'ont pas été visités auparavant puis les marquer 2. Visiter tous les autres sommets directement voisins à 2 n'ayant pas été visités auparavant en procédant de manière analogue jusqu'à visiter tous les sommets du graphe. On supprime les arêtes reliant deux sommets n'ayant pas été relié durant le parcourt, le graphe obtenu est un arbre couvrant le graphe.

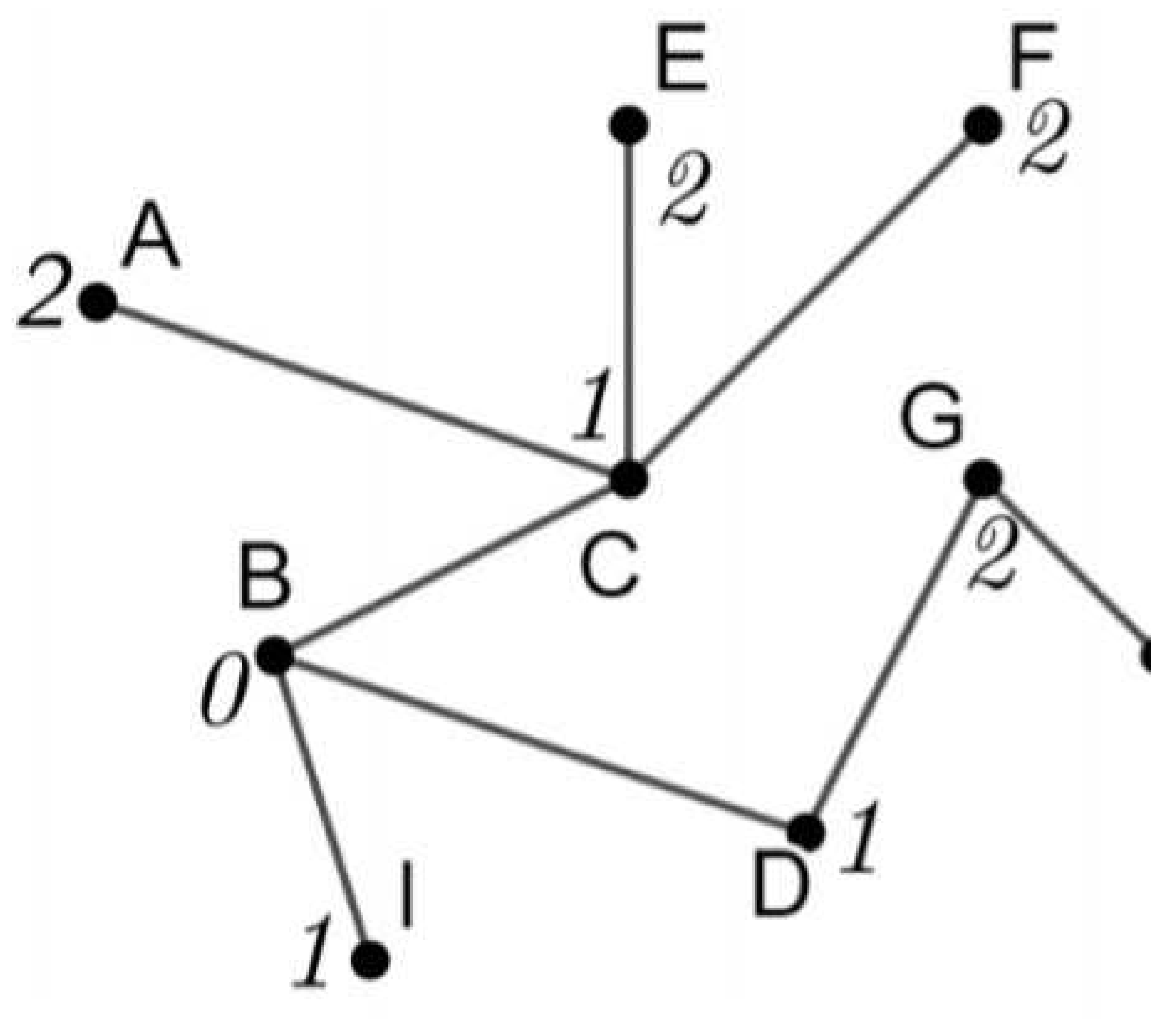
Exemple :Les graphes ci-dessous sont un graphe G et un arbre couvrant G, obtenu en utilisant l'algorithme de parcours en largeur.

Méthode :

- Choisir un sommet de depart (par exemple B) et le marquer de longueur 0 car il est à la distance 0 de lui-même
- Repérer tous les sommets liés directement à ce sommet et les marquer 1. (Ici trois sommets sont reliés directement à B : il s'agit de I, D et C)
- Explorer les nouveaux sommets voisins reliés aux sommets précédemment marqués 1 et les marquer 2. (Il s'agit de A, E, F et G): C et D sont reliés à G, on choisit par exemple D-G.
- On recommence comme ci-dessus jusqu'à toucher tous les sommets. (Dans notre cas, on poursuit avec le sommet H que l'on marque 3. G et F sont reliés à H, ici on a choisi G-H)



Graphe G



Arbre couvrant G

- **Il y a plusieurs arbres couvrant que l'on peut obtenir à partir de l'algorithme de parcourt en largeur**
- **Le BFS permet de determiner un arbre de plus court chemin.**
- **Le BFS permet de Justifier qu'un graphe G est connexe, car il suffit de montrer G contient un arbre couvrant.**

Application :

1.QCM : Qu'est ce qu'un arbre couvrant ?

□ Un graphe partiel qui est un arbre

□ Un sous graphe qui est un arbre

□ Un sous graphe partiel qui est un arbre.

2.Détermine un arbre couvrant dans chacun des graphes ci-dessous en utilisant le parcourt en largeur.