



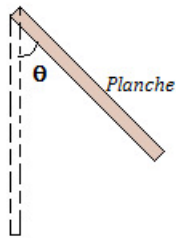
Leçon 10: Les oscillateurs mécaniques

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

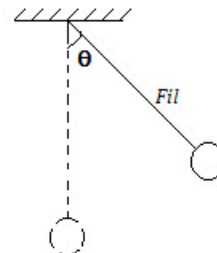
On considère les systèmes oscillants ci-dessous :



(a)



(b)



(c)

- a. Qu'appelle-t-on système oscillant ?
- b. Quelles sont les grandeurs caractéristiques d'un système oscillant ?
- c. Quelle différence faites-vous entre les systèmes oscillants ci-dessus ? Donner le nom de chacun de ces systèmes.

Objectifs généraux

- Étudier les caractéristiques d'un oscillateur mécanique (OM)
- Montrer la conservation de l'énergie mécanique en l'absence d'amortissement
- Différencier les oscillations mécaniques libres des oscillations forcées.

GÉNÉRALITÉS SUR LES OSCILLATEURS MÉCANIQUES

Un **oscillateur mécanique** est un système capable de se mouvoir de part et d'autre d'une position moyenne.

Dans cette leçon, nous étudierons trois oscillateurs mécaniques appelés **pendules** pouvant être décrits par le modèle de l'oscillateur harmonique et pouvant effectuer :

- des oscillations de translation tels que les **pendules élastiques**
- des oscillations de rotation tels que les **pendules pesant et simple**

Écartés de leur position d'équilibre puis abandonnés à eux-mêmes, ils effectuent des oscillations libres par opposition aux oscillations forcées qui se font avec l'impulsion d'un agent extérieur.

On parlera d'**oscillations non amorties** lorsque l'amplitude des oscillations reste constante ou d'**oscillations amorties** dans le cas contraire. L'**entretien** des oscillations se fera en compensant les effets d'amortissement.

(Extrait Chap. 6 p162 Excellence en Physique T^{le} C,D,E et TI)

Nota Bene : *Seul le pendule simple est au programme de la Tle D*


Séance 1

8.1 Étude du pendule élastique

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Soit un oscillateur mécanique non amorti. Sa pulsation est $\omega = 1 \text{ rad/s}$. L'équation différentielle régissant le déplacement de son centre de gravité est : (E) : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. On note $x(t)$ la solution de cette équation différentielle.

- 1-) Quelle est la caractéristique d'un mouvement non amorti ?
- 2-) Donner la forme générale de la solution $x(t)$ de l'équation (E).
- 3-) Quels sont les paramètres qui vont décrire le mouvement de cet oscillateur ?
- 4-) Expliciter $x(t)$ dans les cas suivants :
 - a. À $t = 0$, l'amplitude vaut 2 cm et la vitesse est nulle
 - b. $x(0) = -1 \text{ cm}$ et $\dot{x}(0) = 1 \text{ cm/s}$
 - c. $x(t_1) = x_1$ et $\dot{x}_1 = v_1$

OBJECTIFS

- Décrire le pendule élastique
- Appliquer le TCI pour ressortir l'équation différentielle du mouvement
- Déterminer la période, la pulsation et la fréquence d'un pendule élastique
- Établir l'équation horaire du mouvement
- Montrer que l'énergie mécanique d'un pendule élastique non amorti se conserve.

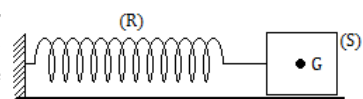
8.1.1. Description

C'est un oscillateur mécanique constitué d'un système **{Solide - Ressort}**. Le ressort (R) est à spires non jointives et dont l'une des extrémités est fixée à un support et à l'autre extrémité est fixé un solide (S) de masse m .

Selon que (R) travaille en extension ou en compression, il exerce sur (S), une **force de rappel** appelée **tension du ressort** $\vec{T} = -k \cdot \vec{x}$ où x est l'allongement ou le raccourcissement de (R) et k sa raideur.

8.1.2. Le pendule élastique horizontal

Considérons un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G, relié à un ressort de raideur k et de masse négligeable, pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal. Étudions le mouvement de ce solide (*oscillations libres*) lorsqu'il est lâché sans vitesse initiale.



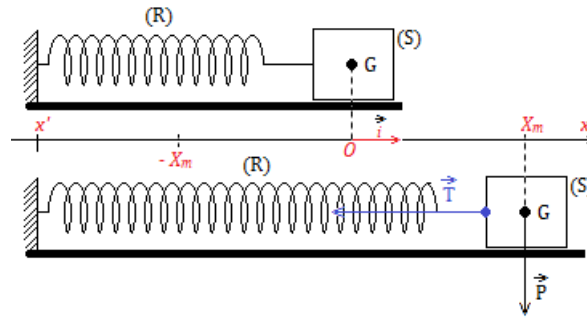


Figure 10.2 : Allongement d'un ressort horizontal

a) Étude dynamique

Système : solide (S)

Référentiel : terrestre supposé galiléen Bilan des forces :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} : \text{poids de S} \\ \vec{R} : \text{réaction du PH} \\ \vec{T} : \text{tension du ressort} \end{array} \right.$$

TCI : $\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$; le mouvement étant suivant Ox , on a : $T_x = ma_x$

or $T_x = -kx$ et $a_x = \ddot{x}$, ce qui donne : $-kx = m\ddot{x}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{array} \right. \quad (10.1)$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.2)$$

L'équation (10.2) est appelée **équation différentielle du second degré** sans second membre. Elle caractérise le **mouvement rectiligne sinusoïdal**.

Une solution de cette équation⁵ peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi : \text{phase initiale (rad)} \\ x_m : \text{amplitude du mouvement (m)} \end{array} \right. \quad (10.3)$$

• Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Unités : k (N/m) ; m (kg) et ω_0 (rad/s) (10.4)

• Période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (s) (10.5)

b) Étude énergétique

• Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (*)

• Énergie potentielle : $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$ (2*)

• Énergie mécanique : $E_m = E_C + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (3*)

En l'absence des frottements, l'énergie mécanique du système solide - ressort est **constante**. Par

5. équation différentielle



conséquent, sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\begin{cases} E_m = cste \\ \frac{dE_m}{dt} = 0 \end{cases} \quad (10.6)$$

En appliquant (10.6.2) dans (3*), on obtient (10.2) :

Démonstration

Une solution de l'équation (10.2) est de la forme : $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$ et $\dot{x} = x_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$.

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \\ &= \frac{1}{2} (m (x_m \omega \cos(\omega t + \varphi))^2 + k (x_m \sin(\omega t + \varphi))^2) \\ &= \frac{1}{2} k x_m^2 \underbrace{(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi))}_1 \\ &= \frac{1}{2} k x_m^2 = cste \end{aligned}$$

Ce résultat montre bien que l'énergie mécanique d'un système en absence de frottement est constante.

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m \dot{x}^2 + k x^2) = \frac{1}{2} (2m \dot{x} \ddot{x} + 2k \dot{x} x) = 0 \\ &\begin{cases} \dot{x} \neq 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.7)$$

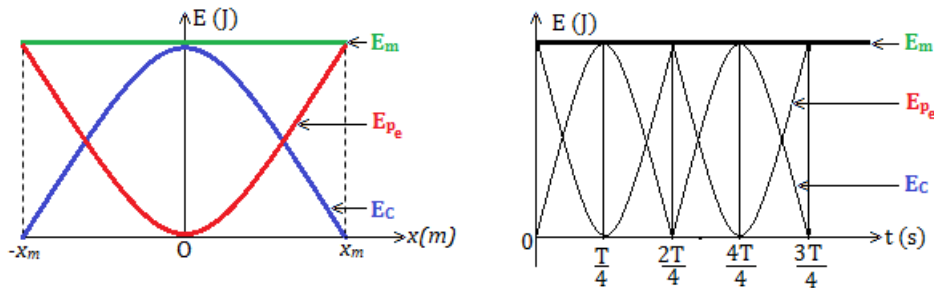


Figure 10.3 : Diagrammes énergétiques d'un ressort

8.1.3. Le pendule élastique vertical

a) Étude dynamique

Considérons un solide (S) de masse m , de centre d'inertie G, se déplaçant verticalement et accroché à un ressort. Étudions le mouvement du centre d'inertie G de ce solide.

- À ℓ_0 , $E_{pe} = 0$, car c'est l'origine des E_{pe}
- En O, $E_{pp} = 0$, car c'est l'origine des E_{pp}
- $OG = G_m$; $OG = x$ ou $\overrightarrow{OG} = x \vec{e}$.

- Système : solide (S) - RTSG^a
- Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} : \text{poids du solide} \\ \vec{T} : \text{tension du ressort} \end{cases}$
- Solide en équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0} \Rightarrow -k\Delta\ell + mg = 0$

^a. référentiel terrestre supposé galiléen

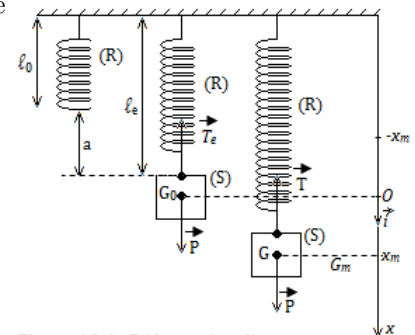


Figure 10.4 : Déformation d'un ressort vertical.



Ainsi, à l'équilibre, l'allongement à l'équilibre $x_e = \ell_e$ sera telle que :

$$x_e = \ell_e = \frac{m}{k}g \quad (10.8)$$

• Solide en mouvement : $\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$ avec
$$\begin{cases} \vec{T} = -k(x + x_e)\vec{i} \\ \vec{P} = m\vec{g} \\ \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} \end{cases}$$

La projection suivant (Ox) donne : $T_x + P_x = ma_x \Rightarrow -k(x + x_e) + mg = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow -kx - \underbrace{kx_e + mg}_0 = m\ddot{x} \text{ ce qui donne : } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.2)$$

b) Étude énergétique

- Énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(x + x_e)^2$
- Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = -mgx$
- Énergie mécanique : $E_m = E_C + E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x_e + x)^2 - mgx$
- Conservation : $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k(x_e + x)\dot{x} - mg\dot{x} = \dot{x} \left(m\ddot{x} + kx + \underbrace{kx_e - mg}_0 \right) = 0$

$$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \xrightarrow{\text{d'où}} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- Valeur de $v_0 = \dot{x}_0$

$$- x = x_m \Rightarrow E_{m1} = \frac{1}{2}k(x_e + x_m)^2 - mgx_m = \frac{1}{2}k(x_e^2 + x_m^2) + x_m \underbrace{(kx_e - mg)}_0$$

$$E_{m1} = \frac{1}{2}k(x_e^2 + x_m^2) \quad (10.9)$$

$$- x = 0 \Rightarrow E_{m2} = \frac{1}{2}kx_e^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (10.10)$$

$$\text{Conservation de l}'E_m : E_{m1} = E_{m2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx_e^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k(x_e^2 + x_m^2)$$

$$\Rightarrow v_0 = \omega_0 x_m \quad (10.11)$$

8.1.4. Le pendule élastique oblique

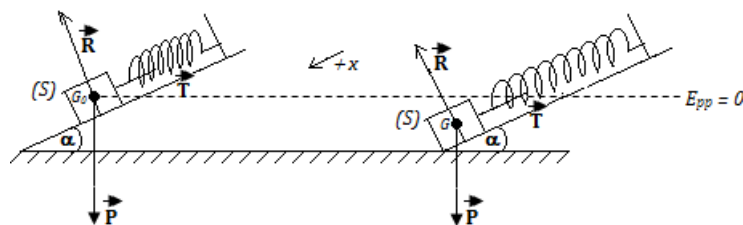


Figure 10.5 : Déformation d'un ressort sur plan incliné

a) Étude dynamique

- Système : solide (S) - RTSG



- Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} : \text{poids du solide (S)} \\ \vec{T} : \text{tension du ressort (R)} \\ \vec{R} : \text{réaction du plan incliné (PI)} \end{cases}$
- Équilibre du solide : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$ (suivant $x'x$) $x_e = \Delta\ell = \frac{mg}{k} \sin \alpha$ (10.12)
- Solide en mouvement : $\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$
Projection suivant les $+x$: $-T + mg \sin \alpha = m\ddot{x} \Leftrightarrow -k(x + x_e) + mg \sin \alpha = m\ddot{x}$
 $\underbrace{mg \sin \alpha - kx_e}_0 - kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (équation du mouvement rectiligne sinusoïdal).

b) Étude énergétique

$$E_m = E_C + E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x_e + x)^2 - mgh \text{ avec } h = x \sin \alpha$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x + x_e)^2 - mgx \sin \alpha$$

Conservation de l'énergie mécanique ($E_m = \text{cste}$) : $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k(x + x_e)\dot{x} - mg\dot{x} \sin \alpha = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

8.1.5. Association des ressorts

Association	Constante de raideur
En série	$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n k_i$
En parallèle	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$

Note : Exploitation expérimentale de la courbe $T^2 = f(m)$

Dans la pratique, pour déterminer la période T du pendule, on effectue n – oscillations de durée Δt . En regroupant les données, on peut tracer la courbe $T^2 = f(m)$ qui est une **droite affine**, puis, on en déduit la constante k du ressort :

$$\begin{cases} T = \frac{\Delta t}{n} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{cases} \quad (10.13)$$

$$\begin{cases} T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)m \\ T^2 = am + b \end{cases} \xrightarrow{\text{identification}} \begin{cases} a = \frac{4\pi^2}{k} \\ b = 0 \end{cases} \quad (10.14)$$

$$\text{On a de même, } a = \text{pente} = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} = \frac{T_f^2 - T_i^2}{m_f - m_i} = \frac{4\pi^2}{k} \quad (10.15)$$

Jeu bilingue

- Ressort = Spring
- Constante de raideur = Stiffness constant
- Plan incliné = Inclined plane.

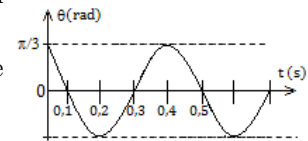


Séance 2

8.2 Étude du pendule de torsion et du pendule pesant

Pour étudier les oscillations d'un pendule de torsion, on dispose de la courbe ci-contre qui représente en fonction du temps t , l'angle θ en radians, que fait la tige avec sa position d'équilibre.

- a. À partir d'un schéma illustratif, établir l'équation différentielle qui régit un tel mouvement.
- b. Déterminer la période propre T_0 du pendule et la constante de torsion C du fil.
- c. Écrire l'équation horaire du mouvement.
- d. Calculer la vitesse angulaire du pendule à son passage par la position d'équilibre.



Le moment d'inertie du pendule est $J = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$

OBJECTIFS

- Décrire le pendule de torsion et le pendule pesant
- Appliquer le TCI pour dégager l'équation différentielle du mouvement
- Déterminer la période d'un pendule de torsion et d'un pendule pesant
- Établir l'équation horaire du mouvement
- montrer que l'énergie mécanique d'un pendule non amorti se conserve.

8.2.1. Pendule pesant

8.2.1.1. Description

- Un pendule pesant est tout solide mobile autour d'un axe (Δ) ne passant pas par son centre de gravité G .
- La position du pendule est repérée par l'angle $\left(\overrightarrow{OG_e}; \overrightarrow{OG} \right)$
- Lorsque le centre de gravité G se trouve à la verticale et en dessous de l'axe de rotation, l'équilibre est dit **instable**.
- Le mouvement $G_1G_eG_2G_eG_1$ est une **oscillation** de période T .



8.2.1.2. Étude dynamique

a. Cas général

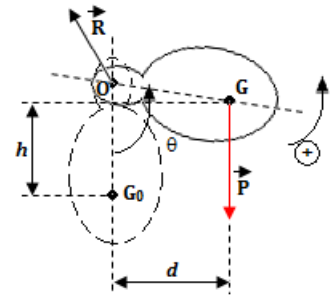
Écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_m puis abandonné à lui-même sans vitesse initiale, le pendule effectue des oscillations de part et d'autre de cette position.



- Système : solide de masse m ; RTSG
- Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} : \text{poids du solide} \\ \vec{R} : \text{réaction de l'axe } \Delta \end{cases}$
- RFDR : $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = M(\vec{P}) + \underbrace{M(\vec{R})}_0 = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -P.OG \cdot \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}. \text{ Posons } a = OG$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \cdot a}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0 \quad (10.16)$$



$$\text{Posons} \quad \omega_0^2 = \frac{mga}{J_{\Delta}} \quad (10.17)$$

(10.16) devient alors,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (10.18)$$

L'équation (10.18) n'admet pas de solution sinusoïdale. Dans ce cas (général), le pendule pesant non amorti n'est pas un oscillateur harmonique.

b. Cas particulier : oscillations de faible amplitude

Dans le cas des petites oscillations i.e. $\theta_m < 9^\circ$, $\sin \theta \approx \theta$ (rad), l'équation (10.18) devient alors :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (10.19)$$

Par cette approximation, le pendule pesant devient un oscillateur harmonique de rotation, de période

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}} \quad (10.20)$$

Unités : J_{Δ} (kg.m²) ; a (m) ; g (m.s⁻²) ; T_0 (s).

L'équation (10.19) admet des solutions sinusoïdales de la forme : $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ où θ_m , ω_0 et φ sont des constantes caractéristiques du mouvement.

Remarque.

- Dans le calcul de J_{Δ} , il faut appliquer le théorème de Huygens : $J_{\Delta} = J_{CG} + m.OG^2$. Le calcul de OG se ramène à la détermination du barycentre.
- Pour les oscillations de faible amplitude, la période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}}$ est constante et ne dépend pas de l'amplitude ω_m : on dit alors que les oscillations sont **isochrones**. Mais l'expérience montre que pour les amplitudes élevées ($8^\circ \leq \theta_m \leq 20^\circ$), $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right)$
- d'après la **loi des masses** des pendules de même forme mais constitués de substances différentes, possédant les masses différentes, oscillent avec la même période : la période est donc indépendante de la masse.

8.2.1.3. Étude énergétique

En prenant la position du centre d'inertie à l'équilibre (G_0) comme origine des énergies potentielles, on a :

$$- E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \quad (10.21)$$

$$- E_{pp} = mgh = mgOG(1 - \cos \theta) = mga(1 - \cos \theta) \quad (10.22)$$



$$- E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} J_{\Delta} + mga(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dE_m}{dt} = J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + mga \dot{\theta} \sin \theta = \dot{\theta} (J_{\Delta} \ddot{\theta} + mga \sin \theta) = 0$$

$$\text{or } \dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mga}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

Note

- Pour $\theta = \theta_m$, $\dot{\theta} = 0$: $E_m = E_{ppmax} = mga(1 - \cos \theta_m)$ (10.23)

- Pour de faibles amplitudes, $\begin{cases} \cos \theta_m \approx 1 - \frac{\theta_m^2}{2} \\ E_{ppmax} = \frac{\theta_m^2}{2} mga \end{cases}$ (10.24)

- Pour $\theta = 0$, $E_m = E_{cmax} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_0^2$ (10.25)

- Vitesse $\dot{\theta}$ à la position θ

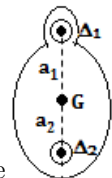
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mga(\cos \theta - \cos \theta_m)}{J_{\Delta}}} \quad (10.26)$$

$$\text{Pour } \theta = 0, \begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mga(1 - \cos \theta_m)}{J_{\Delta}}} \\ V_G = \dot{\theta} \cdot OG \\ V_M = \dot{\theta} \cdot OM \end{cases} \quad (10.27)$$

8.2.1.4. Pendule pesant réversible

Un pendule pesant réversible est un pendule pesant dont la période d'oscillation est la même pour deux axes de rotation (Δ_1) et (Δ_2) différents. De tels axes sont dits réversibles. Ils doivent remplir les conditions suivantes :

- situés de part et d'autre du centre d'inertie G
- parallèles et coplanaires
- les distances a_1 et a_2 doivent être différentes



On démontre que la longueur ℓ du pendule simple synchrone du pendule pesant réversible est telle que :

$$\ell = a_1 + a_2 \quad (10.28)$$

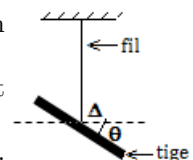
8.2.2. Pendule de torsion

8.2.2.1. Description

Le pendule de torsion est un système constitué d'un :

- fil vertical de constante de torsion C, inextensible et de masse négligeable fixé à un support,
- solide (tige, barre, disque,...) suspendu par son centre d'inertie à ce fil et pouvant osciller dans un plan horizontal.

Le fil de torsion matérialise l'axe de rotation (Δ) autour duquel peut tourner le solide. Lorsque le fil n'est pas tordu, le système est dit en équilibre.



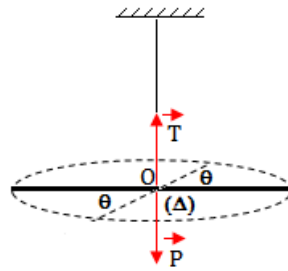
Lorsque le solide tourne d'un angle θ , le fil tordu, exerce un couple de rappel appelé **couple de torsion**. Le pendule de torsion effectue alors les oscillations. Le moment du couple de torsion est donné par la relation :

$$M = -C\theta \quad (10.29)$$



8.2.2.2. Étude dynamique

Considérons une barre de masse m suspendue par son centre d'inertie à l'extrémité d'un fil de torsion vertical fixé à un support. Tournée d'un angle θ_m puis lâchée sans vitesse initiale, la barre effectue des oscillations autour de l'axe (Δ) .



- Système : barre + fil ; RTSG
- bilan des forces : $\begin{cases} \vec{T} : \text{tension du fil} \\ \vec{P} : \text{poids de la tige de masse } m \end{cases}$
- RFDR : $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = M(\vec{P}) + M(\vec{T}) = -C.\theta = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

On a alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}}\theta = 0 \quad (10.30)$$

On obtient une équation du second degré sans second membre linéaire : le pendule de torsion est alors un oscillateur harmonique dont la solution peut être sous la forme $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et dont la période propre et la pulsation propre sont :

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}} \end{cases} \quad (10.31)$$

Unités : C (N.m.rad⁻¹) ; J_{Δ} (kg.m²) ; T_0 (s) ; ω_0 (rad/s)

8.2.2.3. Étude énergétique

$$\begin{aligned} - E_c &= \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 \\ - E_{pt} &= \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2 \\ - E_m &= E_c + E_{pt} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 \\ \frac{dE_m}{dt} &= J_{\Delta}\dot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = \dot{\theta}(J_{\Delta}\ddot{\theta} + C\theta) = 0 \text{ or } \dot{\theta} \neq 0, \\ \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta &= 0 \end{aligned} \quad (10.32)$$

Remarque.

- L'énergie mécanique totale du pendule de torsion non amorti se conserve au cours des oscillations et vaut : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$
- La période et la pulsation propres sont ainsi appelées parce qu'elles ne dépendent que des caractéristiques de l'oscillateur et non de l'amplitude.



Séance 3

8.3 Étude du pendule simple

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Pour déterminer la valeur de l'intensité de la pesanteur en un lieu donné, on a mesuré, pour plusieurs longueurs, la durée de 20-oscillations d'un pendule simple et on a obtenu le tableau de valeurs ci-dessous :

ℓ (m)	0,400	0,600	0,800	1,000	1,200	1,400	1,600
τ (s)	25,36	31,04	35,84	40,04	43,92	47,44	50,72
T_0 (s)							

- Déterminer la période propre des oscillations correspondant à chaque longueur et compléter le tableau de valeurs.
- Tracer le graphe $T_0^2 = f(\ell)$ et vérifier la validité de l'expression théorique de la période d'un pendule simple.
- En déduire la valeur du champ de pesanteur du lieu d'expérience.

OBJECTIFS

- Définir pendule simple
- Appliquer le TCI pour établir l'équation du mouvement
- Établir l'équation horaire du mouvement
- Montrer que l'énergie mécanique d'un pendule simple non amorti se conserve

8.3.1. Définition et présentation

Le **pendule simple** est toute masse ponctuelle oscillant autour d'un axe fixe auquel elle est reliée par un fil de masse négligeable.

La longueur du fil est la longueur du pendule simple.

Le pendule simple, est le cas **limite** d'un pendule pesant.

Dans le cas pratique, l'objet ponctuel est une bille de rayon $r \ll \ell$.



Remarque.

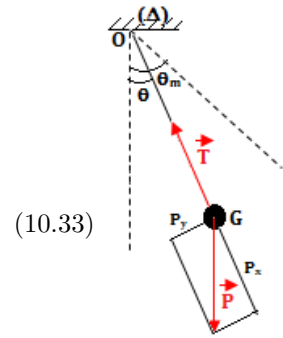
- Pour un pendule simple, T_0 varie en fonction de ℓ . Pour les métaux, $\ell = \ell_0(1 + a\theta)$ où a est le coefficient de température ($^{\circ}C^{-1}$), θ , la température ($^{\circ}C$) et $\ell_0 = \ell(\theta = 0)$. Dans ce cas, $T = T_0\sqrt{1 + a\theta}$.
- Pour un pendule simple battant à la seconde, $T_0 = 2s$ et $\ell = \frac{g}{\pi^2}$.
- Une alternance est équivalent à une demi-oscillation.

8.3.2. Étude dynamique

Écartons le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle θ_m , puis, abandonnons-le à lui-même sans vitesse initiale. Il effectue des oscillations de part et d'autre de cette position.



- Système : {fil + masse} - RTSG
 - Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} : \text{poids de la masse} \\ \vec{T} : \text{tension du fil} \end{cases}$
 - Solide en rotation (RFDR) : $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = M(\vec{P}) + M(\vec{T}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$
- Or $\begin{cases} M(\vec{T}) = 0 \text{ car sa droite d'action rencontre } (\Delta) \\ M(\vec{P}) = \underbrace{M(\vec{P}_x)}_0 + M(\vec{P}_y) = -P_y \cdot OG = -mg\ell \sin \theta \end{cases}$
- L'équation du mouvement du pendule est alors :



(10.33)

$$J_{\Delta}\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \quad (10.34)$$

L'équation (10.34) n'est pas **linéaire**, ses solutions ne sont par conséquent pas sinusoïdales : **le pendule simple n'est donc pas un oscillateur harmonique**.

Soit $J_{\Delta} = m\ell^2$, le moment d'inertie du pendule simple. Pour des faibles oscillations (i.e. $\theta < 9^\circ$),

$$\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \quad (10.35)$$

En considérant la valeur de J_{Δ} et l'approximation (10.35.1) ci-dessus, l'équation (10.34) devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \quad (10.36)$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ (pulsation propre) (10.37)

(10.36) devient alors : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ (10.38)

L'équation (10.38) étant linéaire, les solutions sont alors sinusoïdales de la forme : $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où θ_m , ω_0 et φ sont des constantes du mouvement du pendule. De la relation (10.37), on en déduit alors que, le pendule simple, après approximations, a pour période propre T_0 et pour fréquence propre f_0 définies par :

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \\ f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \end{cases} \quad (10.39)$$

8.3.3. Étude énergétique

En considérant les oscillations du pendule simple et en prenant pour origine des énergies potentielles la position du centre d'inertie G à l'équilibre, l'énergie mécanique à un instant t quelconque, sera :

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + mgh \text{ or } h = \ell(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (10.40)$$

La valeur de l'énergie mécanique E_m étant

$$E_m = \frac{mg\ell}{2}\dot{\theta}^2 = \text{cste} \quad (10.41)$$

ce qui montre que l' E_m du système est constante (système conservatif), par conséquent, sa dérivée par rapport au temps est nulle. Dans ce cas, en dérivant (10.40) par rapport au temps, on aura :

$$\frac{dE_m}{dt} = \ell(\ell\ddot{\theta} + g \sin \theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ell \neq 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \end{cases}$$

L'énergie mécanique totale d'un pendule simple non amorti se conserve au cours des oscillations et



peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2} m V_m^2 \quad (10.42)$$

Nota Bene

- Pour des oscillations de faible amplitude, la période du pendule est indépendante de l'amplitude. De telles oscillations sont dites **isochrones** : on parle d'isochronisme des petites oscillations. Dans le cas contraire, la période s'écrit :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right) \quad (10.43)$$

- Pour un même lieu, $g = \text{cste}$ et $T = \text{cste} \cdot \sqrt{\ell}$ (loi des longueurs)
- Pour une longueur donnée ($\ell = \text{cste}$), on a : $T\sqrt{g} = \text{cste}$ (loi des accélérations)
- Pour vérifier l'influence de la valeur de l'intensité de la pesanteur g sur la période, on réalise un pendule pesant incliné appelé **pendule de MACH**.

Ainsi, en posant $g' = g \cdot \cos \alpha$, on obtient : $T\sqrt{\cos \alpha} = \text{cste}$ (loi de substance de la masse)

8.3.4. Pendule simple synchrone d'un pendule pesant

- Un pendule simple est dit synchrone d'un pendule pesant lorsque les deux pendules possèdent la même période d'oscillation.
- La longueur du pendule simple synchrone d'un pendule pesant est :

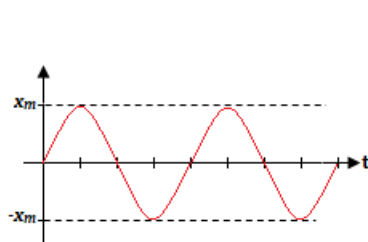
$$\ell = \frac{J_{\Delta}}{m \cdot OG} \quad (10.44)$$

8.3.5. Amortissement des oscillations

- Une **oscillation amortie** est une oscillation dont l'amplitude diminue au cours du temps sous l'effet des forces de frottement.
- Le phénomène des amortissements est dû à la perte d'énergie au cours des oscillations. Ce phénomène se traduit par la diminution de l'amplitude des oscillations.
- On distingue deux types d'amortissement :
 - **l'amortissement par frottement solide**
 - **l'amortissement par frottement visqueux**
- Dans les deux cas, les oscillations ne sont plus périodiques et on les qualifie de **pseudo-périodique** et la période T d'une oscillation est appelée **pseudo-période**.

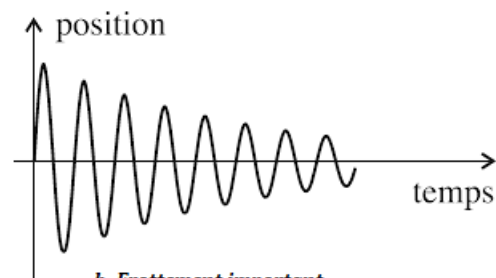
a. Amortissement par frottement solide

Dans ce cas, si les frottements sont importants, l'amplitude décroît linéairement au cours du temps.



a- Frottement négligeable

L'amplitude décroît peu, les oscillations sont presque sinusoïdales. La pseudo-période T est égale à la période propre T_0



b- Frottement important

L'amplitude décroît dans le temps suivant une fonction affine jusqu'à la valeur nulle, les oscillations sont pseudo-périodiques. La pseudo-période $T = T_0$.



b. Amortissement par frottement visqueux

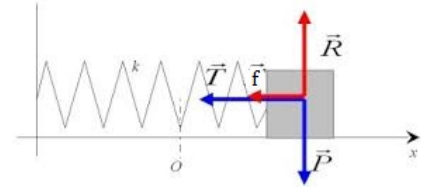
Les frottements visqueux ou fluides sont caractérisés par une force opposée au vecteur vitesse :

$$\vec{f} = -b\vec{v} \quad b > 0 \quad (10.45)$$

b = coefficient de frottement visqueux.

- Système : solide de masse m

$$\bullet \text{ Bilan des forces : } \begin{cases} \vec{P} : \text{poids de } m \\ \vec{f} : \text{force de frottement} \\ \vec{R} : \text{réaction du plan horizontal (PH)} \\ \vec{T} : \text{force de rappel} \end{cases}$$



- TCI : $\vec{T} + \vec{P} + \vec{f} + \vec{R} = m\vec{a}$ Suivant (Ox) , on a :

$$-kx + 0 + 0 - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{posons } \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \lambda = \frac{b}{m} \end{cases} \quad (10.46)$$

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10.47)$$

λ = coefficient d'amortissement.

L'équation (10.29) est une équation du second ordre avec second membre.

- lorsqu'il se produit une seule oscillation avant l'arrêt, on parle d'amortissement **sous critique**
- lorsque l'oscillateur s'arrête juste en atteignant la position d'équilibre, on parle d'amortissement **critique** et le régime est **apériodique**
- lorsqu'il n'y a plus d'oscillations, le mouvement est **apériodique** et on parle d'amortissement **sur-critique**

c. Application des oscillations amorties

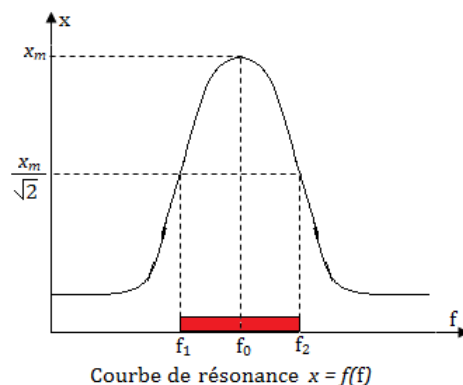
Pour atténuer les vibrations verticales qui nuisent au confort et à la sécurité des passagers, par exemple lors du passage d'un véhicule dans un trou sur une route, on associe à chaque roue un système (*amortisseur*) formé d'un **ressort et d'un fluide visqueux**.

8.3.6. Entretien des oscillations : phénomène de résonance

Dans la pratique, pour maintenir constantes les amplitudes des oscillations, il faut communiquer au système, à tout instant, de l'énergie pour compenser l'énergie perdue. Dans ce cas, les oscillations ne sont plus libres mais **forcées** ou **entretenu**.

Si la fréquence f de l'excitateur est égale à la fréquence propre f_0 des oscillations libres, alors on parle de la **résonance** et l'amplitude est maximale.

L'intervalle $[f_1 ; f_2]$ correspond à la bande passante.



Jeu bilingue

- Bande passante = Bandwidth
- Fluide visqueux = Viscous fluid
- Amortissement = Amortization