

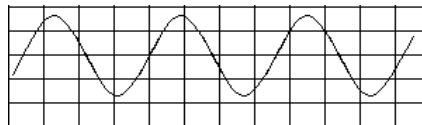


Leçon 9: Généralité sur les systèmes oscillants

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

L'enregistrement du mouvement d'un **oscillateur mécanique** est effectué à l'aide d'un cylindre tournant de sorte qu'un point de sa périphérie ait une vitesse de 20 cm.s^{-1} .

En se servant du graphe ci-contre, déterminer :



- (a) L'amplitude du mouvement de l'oscillateur ;
- (b) Sa période et sa fréquence ;
- (c) Son équation horaire.

Objectif général

■ Introduire les notions de base nécessaires à l'étude des systèmes oscillants et des phénomènes périodiques.

Séance 1

7.1 Les caractéristiques d'un système oscillant

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Le mouvement rectiligne sinusoïdal d'un oscillateur mécanique s'écrit : $x(t) = 3 \sin(100\pi + t)$ (en m).

1. Comment appelle-t-on cette équation ?
2. Déterminer :
 - a. L'amplitude maximale x_{max} de ce mouvement ;
 - b. La période T des oscillations.
 - c. La vitesse $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Objectif

- Définir et donner un exemple de grandeur sinusoïdale : amplitude, période, fréquence, phase, pulsation, oscillation, oscillateur harmonique,...



7.1.1. Définitions et exemples

a. Définitions

- Un phénomène est dit **périodique** lorsqu'il se reproduit identique à lui-même à des intervalles de temps successifs et égaux.

Par exemple, le lever et le coucher du Soleil.

- Un phénomène périodique est dit **oscillatoire** si la grandeur physique associée (*grandeur oscillatoire*) subie des variations de part et d'autre d'une valeur moyenne.

Par exemple, l'équation horaire $u(t) = |4| \cos \left(10\pi t + \frac{3\pi}{4} \right)$ V, oscille entre les tensions -4 V et +4 V ayant une période $T = 0,2$ s.

- Un **système oscillant** ou **système oscillatoire** est un système manifestant une évolution alternative et périodique au cours du temps du fait de ses propres caractéristiques. En d'autres termes, un système oscillant est un système effectuant des mouvements périodiques de va-et-vient de part et d'autre de sa position d'équilibre.

Par exemple, le mouvement d'une balançoire, ou le balancier d'une horloge, le pendule élastique.

- Un phénomène **vibratoire** est un phénomène oscillatoire rapide.

Par exemple, lorsque l'on produit un ébranlement à l'une des extrémités d'une corde. La vibration se propage le long de la corde. Ou lorsqu'on traverse une route pleine de trous ou une zone de turbulence dans un avion,...

- Le mouvement d'un système oscillant sur une période est une **oscillation** tandis que l'évolution rapide d'un système oscillant sur une période est une **vibration**.
- Selon qu'on fournit de l'énergie ou pas à l'oscillateur au cours du temps, les oscillations sont dites **forcées** ou **libres**.
- Les pertes d'énergie d'un oscillateur libre (*par frottement ou par effet joule*), entraînent l'**amortissement** puis l'**arrêt** des oscillations. Un tel oscillateur est dit **amorti**.

Pour compenser ces pertes d'énergie, il faut **entretenir les oscillations** en fournissant de l'énergie à l'oscillateur (*par exemple utiliser un électroaimant dans le cas d'une lame vibrante*).

Remarque.

- Un système oscillant est aussi un système qui effectue un mouvement oscillatoire.
- La période des oscillations libres (cas d'un diapason) n'est pas imposée par un dispositif extérieur contrairement à celle des oscillations forcées (cas d'une horloge).

b. Exemples de systèmes oscillants

On distingue :

- Les oscillateurs mécaniques** : les balançoires - les horloges à balancier - les aiguilles d'une montre mécanique (*pendule pesant ou élastique*) - le son émis par un diapason (*oscillateur acoustique*)
- Les oscillateurs biologiques** : le cœur
- Les oscillateurs hydrauliques** : les marées
- Les oscillateurs chimiques** : qui sont des réactions chimiques au cours desquelles les réactifs sont régénérés à partir des produits de façon alternative
- Les oscillateurs électriques** : dans les circuits à courant alternatif, la tension et le courant varient de façon périodique en fonction du temps.



Balançoire



Horloge à balançoire



Pendule élastique



Pendule pesant



Diapason

Figure 7.1 : Quelques exemples d'oscillateurs mécaniques

7.1.2. Les caractéristiques du mouvement d'un système oscillant

a. Grandeurs physiques associées

À tout phénomène vibratoire, on peut associer une grandeur physique i.e. une grandeur mesurable et dont on peut observer les variations dans le temps.

Exemples :

- Pour les oscillateurs mécaniques (pendule de torsion, pendule élastique,...), les grandeurs physiques associées sont respectivement $\theta(t)$ (*angle de torsion*) et $x(t)$ (*déplacement rectiligne*).
- Pour les oscillateurs électriques, on a : $u(t)$ pour la tension électrique, $i(t)$ pour le courant électrique, $q(t)$ pour la charge électrique.

Nota Bene

Les grandeurs physiques associées aux phénomènes vibratoires sont représentées par des grandeurs sinusoïdales. Soit $g(t)$ la **loi horaire**. L'écriture traduisant le mouvement oscillatoire, peut être l'une des écritures du système ci-dessous :

$$\begin{cases} g(t) = G_m \sin(\omega t + \varphi) \\ g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (7.1)$$

Remarque.

- Une grandeur sinusoïdale est une grandeur qui décrit une **sinusoïde** dans le temps.
- Un **oscillateur harmonique** ou **linéaire** est un oscillateur dont la loi horaire de son mouvement est une fonction sinusoïdale du temps.

b. Amplitude - période - fréquence d'un SO⁴

- **L'amplitude** : C'est la valeur absolue de l'écart maximal de la grandeur physique associée par rapport à sa valeur moyenne. En d'autres termes, c'est la valeur absolue de la grandeur physique maximale associée au SO.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, l'abscisse linéaire $x(t)$ varie entre $-X_m$ et $+X_m$ de par et d'autre de 0 : la valeur extrême positive $+X_m$ est l'amplitude des oscillations.

- **La période T** : C'est le plus petit intervalle de temps au bout duquel un phénomène se répète identique à lui-même. C'est aussi l'intervalle de temps constant t , correspondant à deux passages consécutifs d'un mobile dans le même sens et par la même position. La période a pour unité la seconde (s) et $\dim(T) = T$. La période représente la durée d'une oscillation.



- **La fréquence** N (tr/s), f (Hz) ou ν (Hz) : C'est le nombre de fois qu'un phénomène se répète pendant l'unité de temps.
- **La phase** $(\omega t + \varphi)$: C'est l'argument de la grandeur sinusoïdale. Elle s'exprime en radians
- La constante ω est la pulsation ou vitesse (rad.s^{-1}) du système oscillatoire.

$$\begin{cases} \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \\ f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \end{cases} \quad (7.2)$$

Remarque.

- On appelle **oscillation**, le mouvement effectué par un mobile pendant une période.
- Un **battement** correspond à une demi-oscillation.
- Un oscillateur qui bat la seconde est un oscillateur de période $T = 2$ s.
- Une vibration est une oscillation rapide.

Si un mobile effectue n – oscillations ou n – vibrations pendant l'intervalle de temps $\Delta t = n.T$, alors :

$$\begin{cases} T = \frac{\Delta t}{n} \\ f = \frac{1}{T} = \frac{n}{\Delta t} \end{cases} \quad (7.3)$$

Considérons le mouvement d'un oscillateur dont la loi horaire est par :

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.4)$$

avec x_m = amplitude (m) ; φ = phase initiale (rad) ; $\Phi(t) = \omega t + \varphi$ = phase à l'instant t .

La courbe caractéristique relative à (7.4) est la suivante :

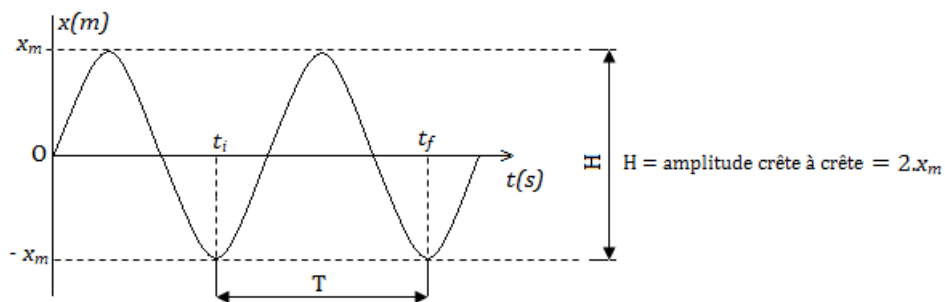


Figure 7.2 : Mouvement sinusoïdal

c. Amortissement et entretien des oscillateurs

L'amortissement est caractérisé par la décroissance progressive de l'amplitude du mouvement à cause des pertes d'énergie (frottement, effet joule,...). Pour maintenir l'amplitude constante, il est nécessaire de compenser l'énergie perdue : ce processus est appelé **entretien des oscillations**. Dans ce cas de figure, les oscillations ne sont plus libres mais forcées.

- Le mouvement d'une lame de vibreur peut être entretenu par un électroaimant alimenté en courant alternatif.
- Le mouvement d'une corde vibrante peut être entretenu par la lame d'un vibreur.

Séance 2

7.2 Étude expérimentale des mouvements périodiques

SITUATION DE VIE CONTEXTUALISÉE

On considère l'image ci-dessous dans laquelle le personnage principal (acteur) Néo (Keanu R). se fait tirer des milliers de balles de fusil par des bandits. Par un simple geste de la main droite, les balles freinent dans l'air quelques secondes puis tombent devant lui, lorsque ce dernier baisse sa main droite. Les bandits, regardant la scène restent stupéfaits, étonnés et retentent une seconde fois, mais Néo refait autant de fois qu'ils tirent, le même geste.



Vous êtes au salon entrain de visionner ce film et votre petit frère dit qu'il ira essayer la scène là avec ses amis. Jouant dans la cour, l'un de ses amis, lui lance un fruit de tomate bien mûr et subitement, voilà votre petit frère qui lève aussi sa main comme dans le film, mais hélas, la tomate s'éclate sur son visage, car son ami avait bien calculé. Alerté par les pleures de votre petit frère, vous sortez le regarder et vous le trouvez en larmes. Vous vous renseignez auprès de ses amis et ils vous expliquent la scène.

Tâches

- En tant que grand frère, comment réagiras-tu face à la situation de votre petit frère ?
- Expliquer comment Néo arrive-t-il à réaliser cet exploit.
- Convincez alors votre petit frère qu'il serait impossible pour lui de réaliser le même exploit dans la réalité.

Objectifs

- ▶ Exprimer la grandeur associée à un système oscillant ;
- ▶ Mesurer et déterminer graphiquement les caractéristiques d'un mouvement vibratoire à partir des courbes d'enregistrement et de l'oscilloscope ;
- ▶ Dégager la période et la fréquence d'un phénomène à l'aide de l'éclairage stroboscopique.

Remarque

Il existe plusieurs méthodes expérimentales permettant de déterminer l'amplitude, la période et la fréquence d'un mouvement périodique parmi lesquelles :

- l'enregistrement graphique des courbes,
- l'oscilloscope électronique,
- la stroboscopie.

7.2.1. Enregistrement graphique

Un stylet adapté sur l'objet en mouvement, inscrit une courbe sur un papier calque enroulé sur un cylindre tournant. De cette courbe, on peut donc déduire les caractéristiques du mouvement (*amplitude et période de la sinusoïde*).

Exemple de l'enregistrement du mouvement d'un oscillateur vertical.

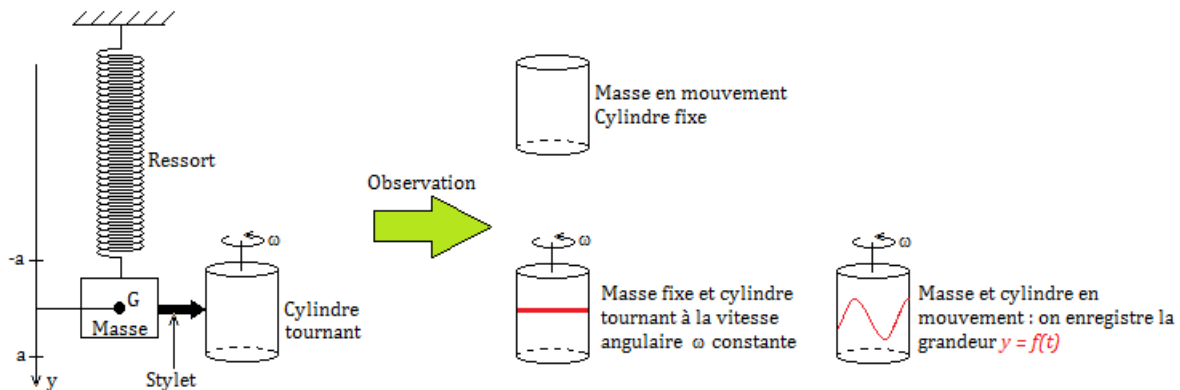


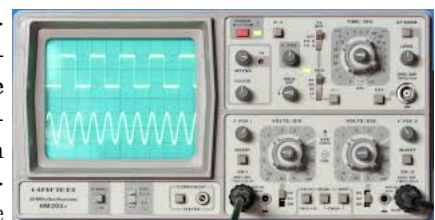
Figure 7.4 : Enregistrement du mouvement d'un oscillateur vertical : cas d'un ressort

Remarque.

- Les **sismographes** sont des oscillosgraphes permettant d'enregistrer des oscillations mécaniques de fréquences < 1000 Hz (tremblement de Terre) ;
- Dans les **électrocardiogrammes**, un capteur transforme les signaux électriques en signaux mécaniques enregistrables.
- Un mouvement vibratoire dont la période n'est pas très faible, peut être étudié simplement par une méthode d'enregistrement direct (*enregistrement graphique*). Par contre, l'étude des phénomènes de très faible période i.e. de grande fréquence, fait appel à des méthodes spécifiques (*oscillographe cathodique*) et la stroboscopie.

7.2.2. L'oscilloscope électronique

La grandeur associée à la vibration à l'aide d'un capteur, est transformée en **tension électrique**, cette tension est envoyée dans **oscilloscope**. L'oscilloscope permet, à partir de ses réglages (*sensibilité verticale et balayage*), de déterminer la **valeur maximale** et la **période** d'une grandeur alternative telle qu'une tension alternative sinusoïdale. On peut visualiser sur l'écran, une tension périodique $u(t)$ et mesurer par la suite, sa période et son **amplitude** U_{max} . Les oscilloscopes peuvent mesurer des périodes de l'ordre de 10^{-9} s.



7.2.3. La stroboscopie

a. Définitions

- La **stroboscopie** est une technique permettant d'étudier les mouvements périodiques rapides en leur donnant une apparence de ralenti ou d'immobilité. C'est aussi une technique d'étude des phénomènes périodiques rapides grâce à des illuminations brèves et intermittentes d'un stroboscope.

Le phénomène à étudier a une fréquence f généralement fixe alors que la fréquence des éclairs f_e est variable car réglable à l'aide d'un rhéostat.



- Un **stroboscope** est une source de lumière intermittente (*qui est discontinue et reprend par intervalle*) émettant des brefs éclairs à des intervalles de temps égaux et réglables.
- Un stroboscope est constitué d'une source de lumière et d'un bouton permettant de régler la fréquence des éclairs. Il existe plusieurs de variétés de stroboscopes parmi lesquels : le stroboscope électronique, le stroboscope à moteur (*à diodes*).

Remarque.

■ Grâce à la **persistance des impressions rétinienne**s, l'œil ne peut voir de manière continue un phénomène continu que si la fréquence est supérieure à 10 Hz.

■ Entre deux éclairs consécutifs, il s'écoule un intervalle de temps noté T_e appelé **période des éclairs**.

■ Le stroboscope ordinaire porte un disque percé de plusieurs trous régulièrement espacés tournant à une vitesse de n tours par seconde. Ainsi, pour un disque ayant p -trous, on a :

$$f_e = n.p \quad (7.5)$$



Figure 7.5 : Exemples de stroboscopes

b. Principe stroboscopique

Pour observer le mouvement périodique d'un objet ayant un repère (*trace, trou, tâche,...*) de période T et de fréquence f ou N , on éclaire par une suite d'éclairs très brefs de période T_e et de fréquence N_e ou f_e . On observe des phénomènes particuliers : **mouvement ralenti** ou **immobilité**.

En éclairage stroboscopique, on peut, en réglant convenablement la fréquence f_e des éclairs, **ralentir** ou **arrêter apparemment** le mouvement à étudier. Connaissant f_e , il est facile de déduire la fréquence du phénomène étudié.

La fréquence du mouvement étudié est égale à la fréquence la plus élevée des éclairs : $f = (f_e)_{\max}$.

c. Étude stroboscopique du mouvement de rotation d'un disque noir ayant un repère

Observation Normale

Figure (a) : En observation directe (*lumière normale*), on observe la pale blanche et les deux autres.

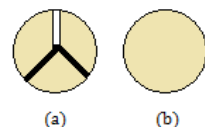


Figure (b) : L'organe (*la roue*) est en rotation. On observe rien.

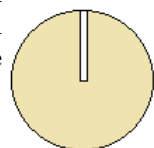
(a) (b)

Observation stroboscopique

■ immobilité apparente à un aspect

Entre deux éclairs consécutifs, le rayon blanc fait 1 (ou k) tour(s) complet(s). L'éclair d'ordre $(n + 1)$ surprend le rayon blanc à la même position où l'on l'a vu à l'émission de l'éclair d'ordre n . Elle **paraît** donc ne pas se déplacer : on dit qu'il y a **immobilité apparente à un aspect**, car on n'observe qu'un rayon comme réellement existant.

$$\begin{cases} f = kf_e \\ T_e = kT \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (7.6)$$



Lorsque $k = 1$, la valeur maximale de la fréquence des éclairs pour laquelle on observe une



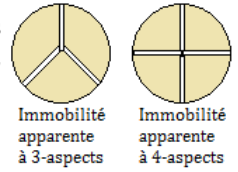
immobilité apparente est :

$$(f_e)_{\max} = f. \quad (7.7)$$

■ immobilité apparente à k -aspects

Entre deux éclairs consécutifs, la rayon blanc fait $\frac{1}{k} - \text{tours}$. Il est ainsi éclairé $k - \text{fois}$ par tour aux mêmes positions. À cause de la persistance des impressions rétinienne, l'œil voit un disque immobile portant $k - \text{rayons}$ blancs. On dit qu'il y a immobilité **immobilité apparente avec $k - \text{aspects}$** .

$$\begin{cases} f_e = kf \\ T = kT_e \end{cases} \in \mathbb{N}^* \quad (7.8)$$



■ mouvement apparent ralenti

Deux cas de figures se présentent selon que T_e est légèrement supérieure ou inférieure à kT .

– T_e légèrement supérieur à kT , soit f légèrement supérieure à kf_e

Entre deux éclairs consécutifs, le rayon blanc fait $\left(k + \frac{1}{n}\right) - \text{tours}$. L'œil ne surprend pas le rayon exactement à la même position, mais légèrement **après** la position initiale. Et comme le phénomène se répète plusieurs fois, l'œil a l'impression que le rayon effectue un **mouvement apparent ralenti** dans le **sens réel** de rotation. *Figure 7.6.a*

– T_e légèrement inférieure à kT , soit f légèrement inférieure à kf_e

Entre deux éclairs consécutifs, le rayon blanc fait $\left(k - \frac{1}{n}\right) - \text{tours}$. L'œil ne surprend pas le rayon exactement à la même position, mais légèrement **avant** la position initiale. Et comme le phénomène se répète plusieurs fois, l'œil a l'impression que le rayon effectue un **mouvement apparent ralenti** dans le **sens contraire** au sens réel de rotation (*ou sens rétrograde*). *Figure 7.6.b*

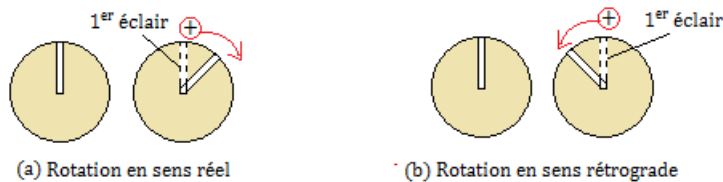


Figure 7.6 : Exemples de mouvement ralenti apparent

D'une manière générale, pour une fréquence apparente f_a , on a :

$$f_a = |f - kf_e| \quad (7.9)$$

- si $f_a > 0$, alors, le mouvement apparent est dans le sens direct ;
- si $f_a < 0$, alors, le mouvement apparent est dans le sens inverse et $f_a = kf_e - f$

d. Application de la stroboscopie

La stroboscopie est utilisée :

- à la télévision (*la fréquence de déplacement des images télé est de 25 Hz*),
- dans le ralenti photographique (*cinématographie, football,...*),
- dans le redressement des roues des voitures ou de certaines pièces mécaniques (*hélices, soupapes,...*),
- dans le réglage de la vitesse de fonctionnement d'une machine (*Ex. : la platine d'une machine musicale*) à la valeur souhaitée,
- ...



Exemples

1. Un ventilateur comporte trois pales grises régulièrement espacées de 120° .

Il est éclairé à l'aide d'un stroboscope de fréquence $f_e = 45$ Hz.

Déterminer les fréquences de rotation possibles du ventilateur pour que les trois pales paraissent immobiles.

Solution 1

Entre deux éclairs consécutifs, les pales font $1/3$ de tour.

La condition d'immobilité apparente à un aspect est : $f = \frac{k}{3}f_e = 15k$ avec $k = \{0, 1, 2, 3, \dots\}_{\in \mathbb{N}^*}$

Les fréquences de rotation possibles du ventilateur sont :

$$f \in \{15, 30, 45, 60, \dots\}.$$

2. Une roue de bicyclette possède 28 rayons supposés tous dans un plan perpendiculaire à l'axe et régulièrement espacés. La roue tourne à la vitesse de 6 tr/s. On l'éclaire à l'aide d'un stroboscope dont les éclairs ont une fréquence réglable entre 50 et 300 Hz.

- Pour certaines valeurs de la fréquence des éclairs, la roue paraît immobile. Expliquer le phénomène et calculer la valeur de ces fréquences.
- Indiquer ce qu'on observerait dans les deux cas suivants :
 - fréquence légèrement supérieure à 168 Hz
 - fréquence légèrement inférieure à 168 Hz.

Solution 2

$n = 28$ rayons ; $f = 6$ tr/s ;

$$50 \leq f_e \leq 300 \text{ (Hz)}.$$

- Expliquons et attribuons les fréquences aux phénomènes observés.

On sait que $f' = kf_e \Rightarrow 50 \leq \frac{f'}{k} \leq 300$

$$\frac{f'}{300} \leq k \leq \frac{f'}{50} \text{ avec } f' = 28 \times 6 = 168$$

tr/s.

$$0,56 \leq k \leq 3,36, k = \{1, 2, 3\}$$

$f_e = \frac{f'}{k}$, on observe une immobilité apparente avec les 28-rayons fixes dans les cas :

- $k = 1, f_e = f' = 168$ Hz
- $k = 2, f_e = f'/2 = 84$ Hz
- $k = 3, f_e = f'/3 = 56$ Hz

- Indiquons l'observation dans les cas suivants :

- f_e légèrement inférieure à 168 Hz : entre deux éclairs consécutifs, la roue et ses 28-rayons rotent dans le sens direct
- f_e légèrement supérieure à 168 Hz : entre deux éclairs consécutifs, la roue et ses 28-rayons rotent dans le sens rétrograde.

3. Pour $f = 60$ Hz, déterminer les valeurs de f_e pour que le disque tournant avec un seul rayon, présente maintenant 2-rayons apparemment immobiles.

Avec $10 \leq f_e \leq 184$ (Hz)

Solution 3

$$\begin{aligned} T_e = \left(k + \frac{1}{n}\right) \cdot T &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot T \\ &= \left(\frac{2k+1}{2}\right) \cdot T \\ &= \left(\frac{2k+1}{1}\right) \cdot \frac{1}{f} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } f_e = \frac{2f}{2k+1} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$10 \leq \frac{2f}{2k+1} \leq 184$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{120}{184} - 1\right) \leq k \leq \frac{1}{2} \left(\frac{120}{10} - 1\right)$$

$$-0,17 \leq k \leq 5,5 \Rightarrow k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- $k = 0, f_e = 2f = 120$ Hz
- $k = 1, f_e = \frac{2}{3}f = 40$ Hz
- $k = 2, f_e = \frac{2}{5}f = 24$ Hz
- ...



Séance 3

7.3 Représentation de Fresnel

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Un oscilloscope bicourbe permet de visualiser deux tensions alternatives sinusoïdales U_1 et U_2 . L'expérimentateur consigne dans le tableau ci-dessous, les valeurs des tensions pour plusieurs instants :

t (ms)	0	5	10	15	20	25
U_1 (mV)	0	5	0	- 5	0	5
U_2 (mV)	-10	0	10	0	-10	0

1. Représenter sur un papier millimétré et sur le même graphe, les deux tensions. Échelles : 1 cm pour 5 ms ; 1 cm pour 5 mV.
2. Établir les équations horaires de U_1 et U_2 sous la forme :

$$U_i = U_{mi} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad i = \{1, 2\}.$$
3. Calculer la différence de phase entre U_1 et U_2 , puis conclure.
4. Déterminer graphiquement, le décalage horaire θ entre U_1 et U_2 . Laquelle des deux tensions est en avance de phase sur l'autre ?
5. En déduire la différence $\varphi_2 - \varphi_1$ entre les deux tensions en π -radian.
6. Par construction de Fresnel, déterminer la tension U telle que $U = U_1 + U_2$.

Objectifs

- ▶ Représenter la grandeur associée à un système oscillant ;
- ▶ Faire la somme de deux grandeurs sinusoïdales isochrones ;
- ▶ Comparer deux grandeurs sinusoïdales de même période.

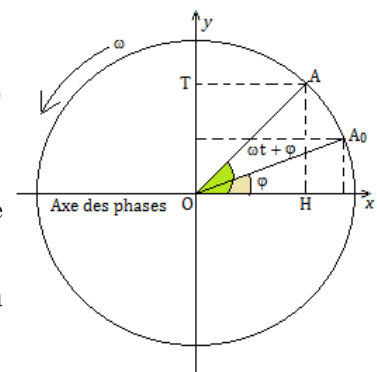
7.3.1. Le vecteur de Fresnel

- À toute fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$, on peut associer un vecteur tournant $\vec{OA}$ de point d'application O, de norme $\|\vec{OA}\| = a$ et dont les angles sont tels que :

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{Ox}; \vec{OA})} = \omega t + \varphi \text{ à tout instant } t \\ \widehat{(\vec{Ox}; \vec{OA}_0)} = \varphi \text{ à } t = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

- Le vecteur $\vec{OA}$ tourne autour du point O à la vitesse angulaire constante ω
- À toute fonction sinusoïdale, on peut associer le représentant du vecteur de Fresnel à l'instant initial : $\vec{OA}_0$

- On a sur la figure contre :
$$\begin{cases} \overline{OH} = a \cos(\omega t + \varphi) \\ \overline{OT} = a \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (7.11)$$





7.3.2. Intérêt du vecteur de Fresnel

7.3.2.1. Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation

Soient deux fonctions sinusoïdales $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Déterminons la fonction y telle que $y = y_1 + y_2 = \sin p + \cos q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ (formule de Simpson).

Construisons le vecteur $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$ tels que : $\vec{OA} \{a; \varphi\}$, $\vec{OA}_1 \{a_1; \varphi_1\}$ et $\vec{OA}_2 \{a_2; \varphi_2\}$.

Pour construire ce vecteur, on procède comme suit :

- tracer bout à bout les vecteurs de Fresnel correspondant aux fonctions sinusoïdales,
- tracer la résultante de ces deux vecteurs de Fresnel

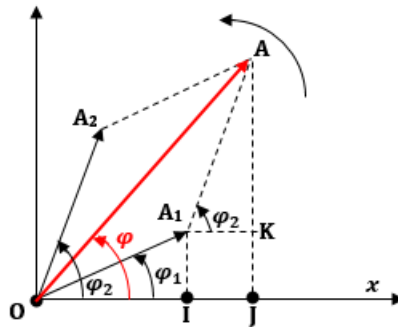


Figure 7.7 : Construction du vecteur de Fresnel

Déterminons l'amplitude a et la phase initiale φ . On a :

$$\vec{OA}^2 = (\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2)^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + 2 \times \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (7.12)$$

Posons $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (7.13)

(7.12) devient alors, $OA = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi}$ (7.14)

$$\tan \varphi = \frac{JA}{OJ} = \frac{JK + KA}{OI + IJ} = \frac{IA_1 + KA}{OI + A_1K}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \quad (7.15)$$

7.3.2.2. Comparaison de deux fonctions sinusoïdales

a. Notion de déphasage

Soient deux fonctions $y_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. On appelle **déphasage angulaire** entre y_1 et y_2 , la grandeur $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ exprimée en radians (rad).

- Si $\Delta\varphi > 0$, alors, $\varphi_2 > \varphi_1$, on dit que y_2 est en **avance** de phase sur y_1
- Si $\Delta\varphi < 0$, alors, $\varphi_2 < \varphi_1$, on dit que y_2 est en **retard** de phase sur y_1

La grandeur θ (en secondes), représente le **décalage horaire**

Un déphasage correspond à un décalage horaire et on a :

$$\begin{cases} |\Delta\varphi| = \omega \times \theta = \frac{2\pi}{T} \theta \\ \theta = \frac{|\Delta\varphi|}{\omega} = \frac{|\Delta\varphi|}{2\pi} T \end{cases} \quad (7.16)$$

b. Déphasages particuliers

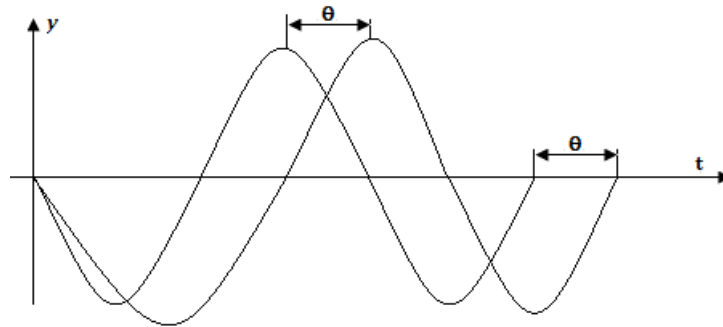
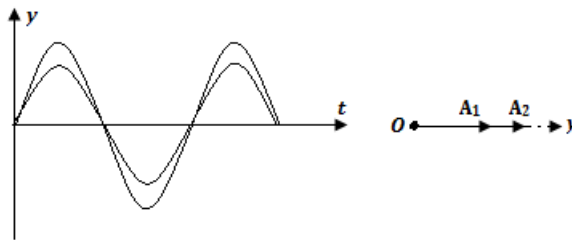


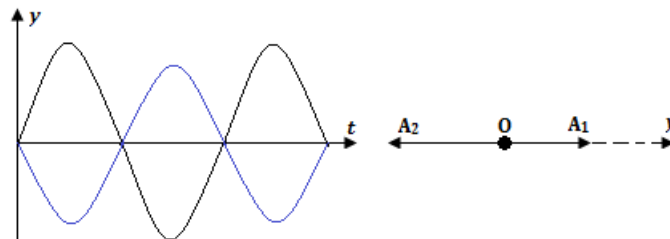
Figure 7.8 : Représentation du décalage horaire θ

- $\Delta\varphi = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: les fonctions sont en **concordance de phase** ou simplement en **phase**.



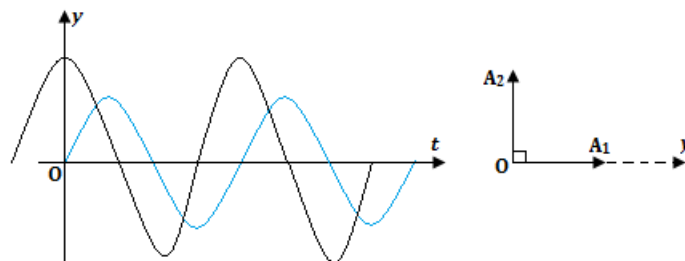
Les vecteurs de Fresnel $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$ sont colinéaires et de même sens. Le décalage horaire est nul. Les courbes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ s'annulent et atteignent leurs extrêmes en même temps : l'amplitude résultante est $a = a_1 + a_2$.

- $\Delta\varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: les fonctions sont en **opposition de phase**.



Les vecteurs de Fresnel $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$ sont colinéaires et de sens contraires. Le décalage horaire θ est telle que $\theta = \frac{T}{2}$ et l'amplitude résultante vaut $a = |a_1 - a_2|$. Les courbes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ s'annulent en même temps, mais, lorsqu'une atteint son maximum, l'autre atteint son minimum.

- $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: les fonctions sont en **quadratures de phase**.



Les vecteurs de Fresnel $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$ sont perpendiculaires. Le décalage horaire θ est telle que $\theta = \frac{T}{4}$. Pendant que l'une des courbes s'annule, l'autre atteint son maximum et l'amplitude résultante vaut : $a^2 = a_1^2 + a_2^2$.