



Leçon 6: Les lois de Newton sur le mouvement

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

L'étude de la chute libre nous a montré que, tout corps lâché sans vitesse initiale, voit sa vitesse augmentée régulièrement au cours du temps

Le principe d'inertie fut énoncé pour la première fois par Galilée comme suit : « *Le centre d'inertie d'un système isolé ou pseudo-isolé persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme dans lequel il se trouve.* »

Soit le mouvement de chute d'une bille de masse m dans la glycérine. La bille subit trois forces : son poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{P}_a$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$.

Au bout d'un certain temps, on constate que la bille atteint une **vitesse limite**. Son mouvement est alors rectiligne uniforme et le vecteur vitesse $\vec{v}_G$ de son centre d'inertie ne varie plus. On constate alors que la vitesse limite est atteinte, lorsque la somme des forces qui s'exercent sur la bille est **nulle**.

Utiliser le texte et vos connaissances pour répondre aux questions suivantes :

- 1- Qu'est-ce qui peut expliquer que, lors du mouvement de chute libre, un objet voit sa vitesse augmenter ?
- 2- Dans quel référentiel est valable le principe d'inertie ?
- 3- Dans le référentiel précédent,
 - a. Que dire des forces qui s'appliquent sur la bille en chute libre, si le vecteur vitesse est constant ?
 - b. Réciproquement, que dire de la vitesse si la somme des forces exercées sur la bille est nulle ?
- 4- Définir référentiel - référentiel galiléen. Énoncer le principe d'inertie selon Newton.

Objectif général

- Déterminer les caractéristiques d'un système matériel ou d'une particule dans un champ de forces uniformes.

Méthode de résolution générale d'un problème de dynamique

Lors de la résolution d'un exercice de mécanique newtonnienne ou mécanique classique, certaines étapes sont nécessaires.

- Définir le système mécanique.
- Choisir un référentiel si le texte de l'impose pas : il doit être galiléen ou de laboratoire.
- Faire le bilan des forces extérieures appliquées au système, en précisant leur direction, leur sens et leurs modules si possible.
- Représentation des forces.
- Appliquer la RFD
- Projeter la relation obtenue sur un système d'axe.



Séance 1

4.1

Rappels sur les référentiels et les repères

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Texte 1

Considérons deux athlètes courant côte à côte :

- Sont-ils en mouvement vis-à-vis du point de départ ?
- Sont-ils en mouvement vis-à-vis de l'arrivée ?
- Sont-ils en mouvement l'un vis-à-vis de l'autre ?



Quelle est la condition pour que les notions de mouvement et de repos aient un sens ?

Texte 2

Lors de l'étude des mouvements (dynamique, cinématique), on peut souvent réduire le mouvement d'un corps, à celui de son centre de gravité représenté par un point matériel. L'ensemble des positions prises par un point matériel au cours du temps s'appelle la trajectoire.

Que faut-il pour décrire le mouvement d'un point matériel ?

Objectifs

- Définir : référentiel - repère - référentiel galiléen.
- Donner des exemples de référentiel.
- Donner des exemples de référentiels galiléens.

4.1.1. Notion de référentiels

- L'état de repos ou de mouvement est **relatif**. Un mouvement ne peut être défini que par rapport à un solide indéformable de référence appelle **référentiel**.
- Un **référentiel** est donc un objet de référence par rapport auquel, on étudie un mouvement.
- Pour décrire le mouvement, il faut donc pourvoir :
 - situer la position d'un point dans l'**espace** en lui attribuant des **coordonnées**,
 - mesurer les **temps** correspondant à chacune des nouvelles positions d'un point lorsque celui-ci se déplace.
- Tout objet en mouvement, est appelé **mobile**.

Exemple

: Une personne A assise au bord de la route regardant un bus B de transport commun passé. Par rapport à la personne A, le bus et ses passagers sont en mouvement, de même, par rapport aux passagers du bus B, l'individu A est en mouvement. Par contre, A est immobile par rapport à elle-même, B et ses passagers sont immobiles par rapport à B ou par rapport à chaque passager voisin (directement ou non).

4.1.2. Notion de repères

Pour décrire mathématiquement les caractéristiques d'un mouvement, un observateur utilise un repère lié au référentiel d'observation. On définit alors le **repère** en physique, comme étant un ensemble de 1, 2 ou de 3 axes du repère mathématique. On distingue alors deux types de repères :



• Repère d'espace

C'est une association d'un point origine (généralement le point O) et d'une base formée de deux ou trois vecteurs orthogonaux et normés.

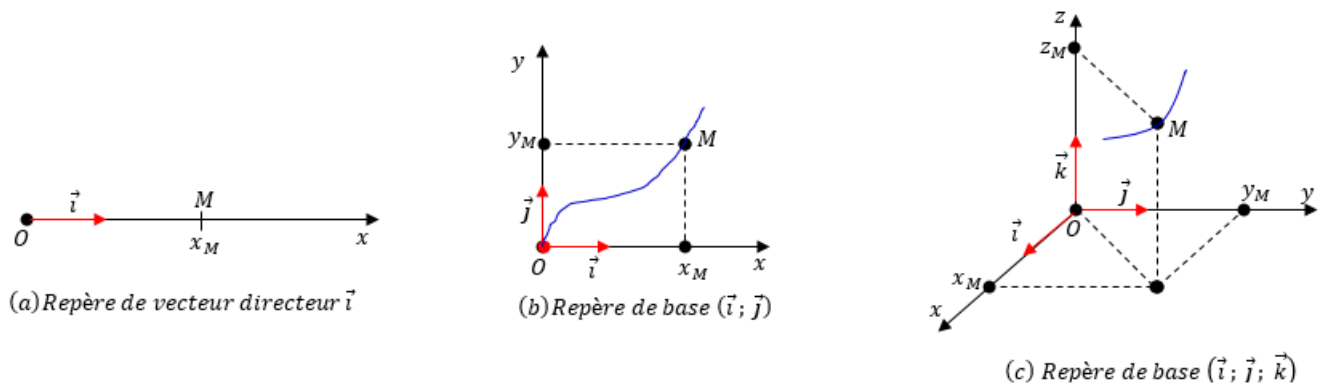


Figure 4.1 : Exemples de repère d'espace

On appelle donc **repère**, le système de repérage dans l'espace associé au référentiel.

• Repère de temps

Pourquoi une horloge ? Parce qu'elle nous sert à mesurer les différents instants auxquels se trouve un point lors de son déplacement.

En mécanique newtonienne, on considère qu'il existe une horloge universelle, commune à tous les référentiels. C'est pratique, parce que l'on peut définir ainsi la simultanéité des événements dans différents repères.

Pour repérer à quel moment un mobile est dans une position donnée, **il faut définir un instant origine**.

On appelle **date**, l'intervalle de temps séparant l'instant considéré d'un instant origine.

Remarque

Un référentiel peut aussi être considéré comme étant l'association du repère d'espace et du repère de temps.

4.1.3. Quelques exemples de référentiels

- Le référentiel **terrestre** : Le solide de référence est un objet fixe à la surface de la Terre. Les trois axes sont par exemple, la verticale, les axes est-ouest et nord-sud. Ce référentiel est adapté à l'étude des mouvements de faible amplitude et de courte durée à la surface de la Terre tels que les mouvements étudiés dans un laboratoire. C'est la raison pour laquelle, le référentiel terrestre est aussi appelé référentiel de **laboratoire**.
- Le référentiel **géocentrique** ou de **Coriolis** : Le solide de référence est le centre de la Terre. Les trois axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Un tel référentiel subit le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil mais pas le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Il est adapté à l'étude du mouvement des satellites en orbite autour de la Terre.
- Le référentiel **héliocentrique** ou de **Copernic** : Le solide de référence est le centre du Soleil. Les trois axes sont les mêmes que ceux du référentiel géocentrique, dirigés vers trois étoiles fixes. Il est adapté à l'étude des astres en orbite autour du Soleil.
- On appelle **référentiel galiléen**, un référentiel dans lequel le centre d'inertie d'un solide soumis à des forces de somme nulle, a un mouvement rectiligne uniforme ou est au repos.

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour des expériences de courte durée devant la période de rotation de la Terre autour de son axe. Pour des phénomènes de longue durée (mouvement des satellites) et nécessitant une grande précision, on utilise le référentiel de Copernic et géocentrique.

Seul le référentiel de Copernic est parfaitement galiléen.



Séance 2

4.2

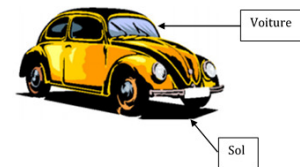
Notion de points matériels sur la dynamique

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

On considère une voiture au repos sur un sol horizontal, comme l'illustre la figure ci-contre.

On définit alors trois systèmes :

- système 1 (S_1) : {sol}
- système 2 (S_2) : {voiture}
- système 3 (S_3) : {sol + voiture}



On admet qu'à sa position de repos, la voiture est soumise à deux forces : la réaction $\vec{R}$ du sol et son poids $\vec{P}$.

- (a) Pour chaque système, ressortir les forces extérieures et intérieures au système.
- (b) Peut-on considérer la voiture comme étant un système matériel ? Justifier.
- (c) Proposer une définition de : système, système matériel, force extérieure à un système, force intérieure à un système.

Objectif

- Définir : forces extérieures - forces intérieures - centre d'inertie d'un solide - point matériel - système matériel.

4.2.1. Système matériel

a- Point matériel

- Un point matériel est un domaine de matière de dimensions suffisamment petites pour être assimilable à un point, il est caractérisé par sa masse m .
- Sa surface et son volume sont sensiblement nuls.

b- Système matériel ou système mécanique

Un système matériel est un ensemble de points matériels.

- Soit M la masse d'un système matériel. De part sa définition, la masse totale M du système matériel, est obtenue en faisant la somme des masses m_i (avec $i = 1, n$) partielles des différents points le constituant :

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + \dots + m_n \quad (4.1)$$

- Le **centre de gravité** d'un système est le point par lequel passent les droites d'action des forces de pesanteurs des éléments de ce système.
- le **centre de masse** d'un système, est le barycentre des points matériels le constituant affectés des coefficients égaux à leurs masses :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{avec} \quad \vec{OG} \begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \sum m_i \cdot x_i \\ y_G = \frac{1}{M} \sum m_i \cdot y_i \\ z_G = \frac{1}{M} \sum m_i \cdot z_i \end{cases} \quad (4.2)$$



- Le **centre d'inertie** est un point particulier du système ayant le même mouvement qu'un point matériel dont la masse serait égale à la masse totale du système et auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures agissant sur le système. Il permet de décrire le mouvement d'ensemble du système.

Remarque

- Pour un solide indéformable dans un champ de pesanteur uniforme, le centre de gravité, le centre de masse et le centre d'inertie sont confondus.
- Un système est dit indéformable ou solide, si les distances entre les points matériels sont invariables.

- Le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ d'un système de points matériels est tel que :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = M \vec{V}_G \quad (4.3)$$

Rmq : Le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$, est le même que celui du centre d'inertie G où serait concentrée toute la masse.

Exemple 4.1

Une pirogue de longueur $L = 5 \text{ m}$ et de masse $M = 150 \text{ kg}$, est au repos sur une eau tranquille. Lorsqu'elle est vide, le centre de gravité se trouve à égale distance des extrémités (au juste milieu de la pirogue). Déterminer la nouvelle position du centre de gravité lorsque la pirogue a un passager de masse $m = 60 \text{ kg}$ assis à l'une de ses extrémités. On admettra que le centre de gravité de la pirogue non chargée est sur la même horizontale que le centre de gravité du passager.

Solution 4.1

pirogue : $\{L = AB = 5 \text{ m}; M = 150 \text{ kg}\}$;
passager : $m = 60 \text{ kg}$ au point B.

Soit G_0 le centre de gravité de la pirogue à vide

tels que :

$$AG_0 = BG_0 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}L;$$

Soit G le barycentre des points pondérés (G_0, M) et (B, m), on a :

$$M\vec{GG_0} + m\vec{GB} = \vec{0} \quad (1)$$

En considérant un repère unidimensionnel ou unidirectionnel, d'origine A d'axe x et orienté suivant $\vec{i}$ et en introduisant A dans (1), on obtient :

$$AG = \left(\frac{M + 2m}{2M + 2m} \right) \times L = 3,21 \text{ cm}.$$

4.2.2. Forces intérieures et extérieures

a- Forces intérieures

Une force intérieure au système est une force exercée par une particule du système sur une autre particule appartenant toujours au système.

En général, ces forces s'annulent deux à deux (principe des actions réciproques). Pour un système indéformable,

$$\sum \vec{F}_{int} = \vec{0} \quad (4.4)$$

b- Forces extérieures

Une force extérieure au système est une force exercée par une particule extérieure au système sur le système.

Par exemple, considérons un point A de la surface de la Terre.

- ★ Dans le système **Terre + A**, le poids de A est une force intérieure (la Terre appartenant au système, attire A);
- ★ Dans le système formé uniquement du point A, le poids de A est une force extérieure.



Séance 3

4.3

Énoncé des lois de Newton sur le mouvement

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Texte 1 : Un pot de fleurs est posé sur une table horizontale. Connaissant les forces qui agissent sur le système {table + pot}, comment justifier que ce pot est en équilibre ? N'est point en mouvement ?

Texte 2 : Un mobile se déplaçant à vitesse constante sur une piste horizontale, conserve à tout instant sa quantité de mouvement.

Texte 3 : L'analyse des unités de base du SI, montre que le newton N a pour équivalent kg.m.s^{-2} . Cet équivalent nous permet donc d'écrire l'équation suivante : $F = m.a$ où a est l'accélération du centre d'inertie du mobile.

- (a) Quelle loi physique met-on en évidence au texte 1 ? Écrire l'équation la traduisant.
- (b) Quelle loi physique met-on en évidence au texte 2 ? Écrire l'équation la traduisant.
- (c) Quelle loi physique met-on en évidence au texte 3 ? Écrire l'équation la traduisant.
- (d) Énoncer les trois lois mises en évidence ici et dites de qui ces lois sont dues.

Objectifs

- Énoncer les trois lois de Newton sur le mouvement.
- Définir et donner un exemple de mouvement de translation.
- Énoncer et appliquer la RFD en translation pour déterminer l'accélération du centre d'inertie d'un solide et déduire la nature de son mouvement.

Remarque.

- Un système matériel est isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure. Un tel système n'existe pas en pratique à cause de l'attraction de la Terre et des autres planètes.
- Un système est **pseudo-isolé** s'il est soumis à des forces qui se compensent à chaque instant i.e. s'annulent ou $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

La dynamique est la partie de la physique qui étudie le mouvement des corps tout en tenant compte des forces agissant sur ces corps. Elle est fondée sur trois lois énoncées par I. Newton : le principe d'inertie, le théorème du centre d'inertie et le principe des actions réciproques.

4.3.1. Principe des actions réciproques : 3^{ème} loi de Newton(a) Énoncé

Lorsque deux corps A et B sont en interaction, le corps A exerce sur B, une force $\vec{F}_1$, réciproquement et au même moment, le corps B exerce sur A une force $\vec{F}_2$, de même direction, de même module mais de sens contraires : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

A et B étant en interaction, la force $\vec{F}_1$ exercée par A sur B et la force $\vec{F}_2$ exercée par B sur A se

compensent :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \quad (4.5)$$

Remarque.

■ La 3^e loi de Newton est vraie dans tout référentiel quelque soit l'état de mouvement des objets A et B.

■ Deux corps A et B sont en interaction quelque soit l'état du mouvement de l'un ou de son état de repos dépendant de l'existence de l'autre.

(b) Exemple

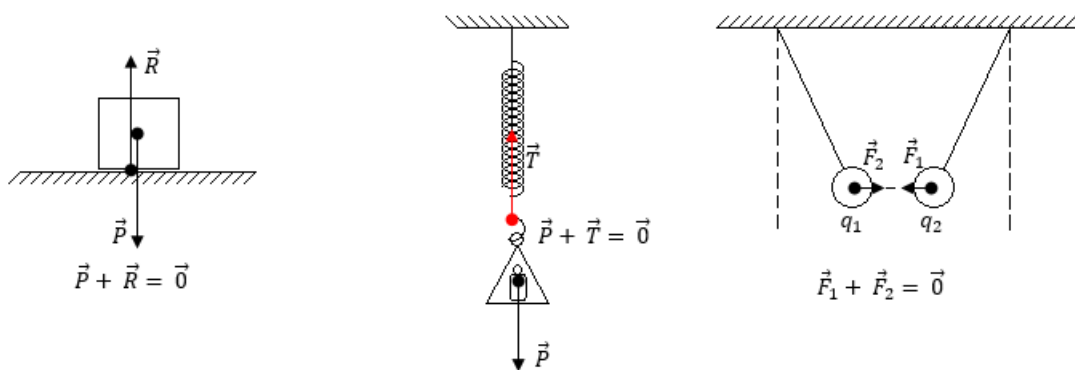


Figure 4.2 : Quelques exemples de système en équilibre

4.3.2. Principe d'inertie : 1^{ère} loi de Newton

(a) Énoncé

Le centre d'inertie G d'un système isolé ou pseudo-isolé reste au repos s'il est initialement au repos ou en mouvement uniforme s'il est en mouvement.

Dans un référentiel galiléen, si la somme des forces qui s'exercent dans un système est nulle, alors son centre d'inertie est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme (MRU) si le système était initialement au repos ou en mouvement.

Remarque.

■ Le principe d'inertie n'est applicable que dans les référentiels galiléens.

■ Un référentiel est dit galiléen si dans celui-ci le principe d'inertie est respecté (corolaire).

■ La quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé est constante : $\vec{v} = cte \Leftrightarrow \vec{P}_G = cte$.

- si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, alors, $\vec{P}_G = cte$: MRU et $\vec{V}_G = cte$

- si $\vec{V}_G = cte \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

(b) Exemple

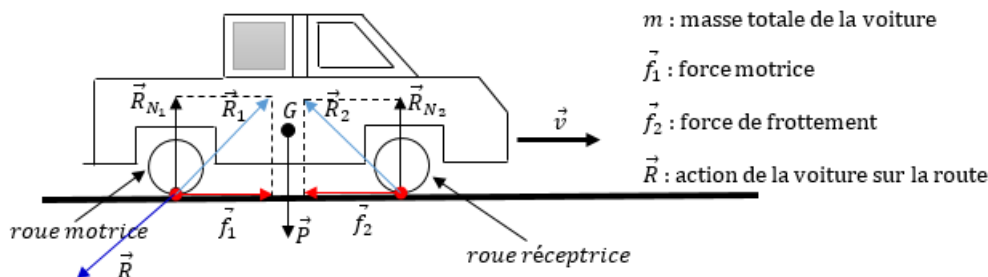


Figure 4.3 : Schéma de mise en évidence



Considérons le mouvement rectiligne uniforme d'une voiture sur une route horizontale (fig. 4.3).

$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow R_{N1} + R_{N2} - P = 0$, on a :

$$\begin{cases} R_{N1} + R_{N2} = mg \\ f_1 - f_2 = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

4.3.3. Théorème du centre d'inertie : 2^{ème} loi de Newton

(a) Quelques définitions

- La **dynamique** est l'étude des mouvements tout en se préoccupant des causes (forces) qui les produisent.
- Un **mouvement de translation** est un mouvement au cours duquel chaque mouvement du solide reste parallèle à lui-même. Tous les points du solide en translation ont même vitesse et même **accélération** qui est celle du centre d'inertie du système.
- Un mouvement est caractérisé par ses paramètres **cinématique**¹ :
 - le vecteur position : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$). M est un point du mobile appartenant à l'espace. Sa norme (en m) est donnée par :

$$||\vec{OM}|| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.7)$$

- le vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \end{aligned}$$

Sa norme (en m.s⁻¹) est donnée par :

$$||\vec{v}|| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (4.8)$$

- le vecteur accélération :

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \\ &= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \end{aligned}$$

(II-1)

Sa norme (en m.s⁻²) est donnée par :

$$||\vec{a}|| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (4.9)$$

(b) Énoncé

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide, est égale au produit de sa masse m par le vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie G :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad (4.10)$$

Remarque.

- L'accélération $a = a_G$ peut aussi s'exprimer en N/kg (cas d'un objet en chute libre)
- le théorème du centre d'inertie (TCI) ne s'applique qu'au centre d'inertie du solide. Il ne s'applique aussi que dans les référentiels galiléens.
- si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} = c\vec{te}$, alors, $\vec{a} = \vec{0}$: MRU (équilibre absolu).
- si $\sum \vec{F}_{ext} = c\vec{te}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), alors, le mouvement est rectiligne uniformément varié (MRUV) :
 - si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$, alors, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA) ;
 - si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$, alors, le mouvement est rectiligne uniformément retardé (MRUR), décéléré (MRUD), ralenti ou freiné (MRUF).

1. partie de la physique qui étudie le mouvement des corps sans toutefois tenir compte des causes qui les produisent.



(c) Relation fondamentale de la dynamique en translation

La relation fondamentale de la dynamique pour la translation (RFDT), est une forme plus généralisée de la deuxième loi de Newton. Elle est également valable si la masse varie au cours du temps.

Énoncé

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide, est égale à la dérivée par rapport au temps, du vecteur quantité de mouvement de ce solide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{Principe fondamental de la dynamique}) \quad (4.11)$$

On sait que $\vec{P} = m\vec{v}$ où m est la masse du solide animé de la vitesse $\vec{v}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\ &= \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} \\ &= m\vec{a} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

– si m varie (cas de la glace fondante), alors, $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$ (4.12)

– si m ne varie pas (cas des corps indéformables = solides), alors, $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ (4.13)

Remarque

Limite de validité de la RFD : La RFD n'est valable que si la vitesse v des particules est faible par rapport à la vitesse c de la lumière dans le vide ($\frac{v}{c} < 1, 4 \cdot 10^{-2}$ avec $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$) : c'est la **dynamique classique**. Dans le cas contraire, on parlera de la **dynamique relativiste**.

Exemple 4.2

Une boule sphérique de rayon R et de masse $m = 2 \text{ kg}$, est abandonnée sans vitesse initiale à l'extrémité supérieure O d'un plan parfaitement lisse incliné d'un angle α sur l'horizontale. Elle y roule sans glisser.

- Soit V la vitesse de la boule à un instant t . Exprimer son énergie cinétique totale en fonction de m et V .
- À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, montrer que son accélération est : $a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$.

Solution 4.2

- Le solide roule, ayant un rayon R non nul, roule sans glisser, cela, montre qu'il possède deux formes d'énergies cinétiques :
 - l'énergie cinétique de translation

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2$$

- l'énergie cinétique de rotation

$$E_c(r) = \frac{1}{2}J_{\Delta} \cdot \omega^2$$

où $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$ = moment d'inertie de la sphère pleine de masse m et de rayon R et $\omega = \frac{v}{R}$, vitesse angulaire de la boule sphérique.

L'énergie cinétique totale E du système est alors telle que :

$$\begin{aligned} E = E_c(t) + E_c(r) &= \frac{1}{2}(mv^2 + J_{\Delta} \cdot \omega^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(mv^2 + \frac{2}{5}mR^2 \times \frac{v^2}{R^2} \right) \\ E &= \frac{7}{10}mV^2 \end{aligned}$$

- Montrons que $a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$

TEC : $\Delta E_c = \sum W(\vec{F}_{ext})$ or, $\Delta E_c = \frac{7}{10}mv^2$
et $\sum W(\vec{F}_{ext}) = W(\vec{P}_x) = mgx \sin \alpha$. Or $v^2 = 2ax$, en introduisant toutes considérations dans le TEC, on obtient aisément,
 $a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$



Séance 4

4.4

Dynamique du solide en rotation

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Texte 1 : En physique, la position angulaire d'un point effectuant un mouvement circulaire est θ .

Texte 2 : On considère une planche homogène de longueur L et de masse m . Pour le mettre en rotation, on définit un axe vertical (Δ) passant par son centre d'inertie G . À nouveau, on définit un second axe (δ) , parallèle à (Δ) , mais passant par l'une des extrémités de ladite planche. Les deux axes sont alors distants de d . Le *théorème de Huygens* appliqué à la planche, montre que le moment d'inertie totale de la planche est alors tels que : $J = J_{\Delta} + J_{\delta}$ avec $J_{\delta} = md^2$ à tout instant et pour tout système rotatif de masse m .

Par analogie de la séance 3 et de vos connaissances, répondez aux questions suivantes.

- a. Donner l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et celle de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de θ et du temps t . En déduire leurs unités dans le SI ainsi que leur dimension.
- b. Va-t-on encore utiliser la RFDt dans le cas d'un système rotatif ? Sinon, proposer une formule traduisant la RFD en rotation.
- c. Proposer un énoncé du théorème de Huygens.

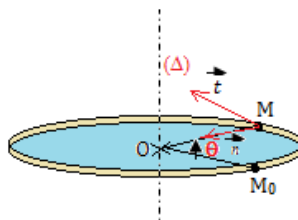
Objectifs

- Définir et donner un exemple de mouvement de rotation.
- Énoncer et appliquer la RFD en rotation pour déterminer l'accélération du centre d'inertie d'un solide et déduire la nature de son mouvement.

4.4.1. Définition

Un mouvement de rotation est un mouvement au cours duquel un solide décrit une trajectoire circulaire autour d'un axe fixe lui appartenant ou pas.

4.4.2. Paramètres cinématiques du mouvement circulaire



$(M; \vec{t}; \vec{n})$ est le repère de Fresnet lié au solide M ; Δ est l'axe de rotation ; $OM_0 = OM = R = \text{rayon}$ (en m) de la trajectoire circulaire décrite par M partant M_0 , position initiale.

- **abscisse angulaire**

$\theta = (\widehat{OM_0; OM})$: le signe de θ est déterminé par le sens positif choisit (*très souvent le sens trigonométrique*).

- **abscisse curviligne ou longueur de l'arc fermé** : $S = \widehat{M_0M} = R\theta$ (θ en rad) (4.15)

- **vitesse angulaire** : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ (rad/s) (4.16)

Lorsque $\dot{\theta} = cste$, on le désigne par ω .



• **accélération angulaire** : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (rad/s²) (4.17)

Remarque.

Pour un mouvement circulaire uniforme (MCU), $\ddot{\theta} = 0$ ($a_t = 0$) $\Rightarrow \dot{\theta} = cste = \omega$

• **vecteur vitesse** :

$$\begin{cases} \vec{v} = v.\vec{t} \\ v = \frac{dS}{dt} = R\dot{\theta} \end{cases} \quad (4.18)$$

• **vecteur accélération** : $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = a_n.\vec{n} + a_t.\vec{t}$ avec $\begin{cases} a_n = \text{accélération normale} \\ a_t = \text{accélération tangentielle} \end{cases}$

En station normale,

$$\begin{cases} a_n = \frac{v^2}{R} = R\dot{\theta}^2 \\ a_t = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta} \end{cases} \quad (4.19)$$

4.4.3. RFD pour la rotation

Soient $\vec{\sigma}$ le mouvement cinétique d'un système formé d'un solide (S) de centre d'inertie G,

$$\vec{\sigma} = \vec{OG} \wedge \vec{P} \quad (4.20)$$

et σ_Δ , le moment cinétique de (S) par rapport à un axe (Δ) au tour duquel il tourne :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}}{dt} &= \frac{\vec{OG}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{OG} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \\ &= \underbrace{\vec{v}_G \wedge m\vec{v}_G}_0 + \vec{OG} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \\ &= \vec{OG} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \end{aligned}$$

or, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OG} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum M(\vec{F}_{ext})$ (4.21)

Ainsi, en posant $\sigma = \sigma_\Delta = J_\Delta.\dot{\theta}$, on aura $\frac{\sigma_\Delta}{dt} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ et donc :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta.\ddot{\theta} \text{ avec } \begin{cases} \ddot{\theta} : \text{accélération angulaire (rad/s)} \\ J_\Delta : \text{moment d'inertie du solide (kg.m}^2\text{)} \end{cases} \quad (4.22)$$

Énoncé de la relation fondamentale de la dynamique en rotation (RFDR)

La somme algébrique des moments $M_\Delta(\vec{F}_{ext})$ par rapport à l'axe de rotation des forces extérieures appliquées à un solide en rotation, est égale au produit du moment d'inertie J_Δ du solide par rapport à cet axe par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du solide :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad (4.22)$$

■ Si $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$, alors, les conditions d'équilibre absolues deviennent :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ translation} \\ \sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0 \text{ rotation} \end{cases} \quad (4.23)$$

■ Si $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cste = \omega$ (MCU) ou si $\dot{\theta} = 0$ (repos absolu), on retrouve un résultat analogue au principe d'inertie.

4.4.4. Moments d'inertie de quelques solides homogènes

Remarquons que :

- un objet est d'autant plus inerte que son moment d'inertie est grand ;
- pour un système pseudo-isolé, le moment d'inertie se conserve : $J_1 \dot{\theta}_1 = J_2 \dot{\theta}_2$

Cerceau ou Circonférence pesante ou cylindre creux ou poulie (m, R)	Cylindre plein ou disque plein (m, R)	Sphère creuse à paroi mince (m, R)	Sphère pleine (m, R)	Tige mince de longueur L	Plaque rectangulaire
$J_{\Delta} = mR^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{2} mR^2$	$J_{\Delta} = \frac{2}{3} mR^2$	$J_{\Delta} = \frac{2}{5} mR^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{12} mL^2$	$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

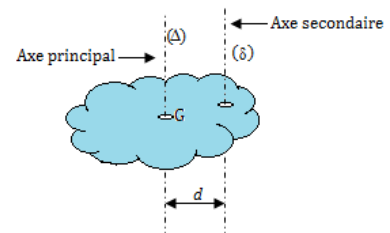
Tableau de synthèse de quelques moments d'inertie J_{Δ}

4.4.5. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe secondaire : théorème de Huygens

Énoncé du théorème de Huygens

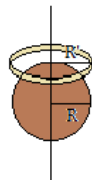
Le moment d'inertie J_{δ} d'un solide de masse m par rapport à un axe quelconque (axe secondaire), est égale à la somme du moment d'inertie J_{Δ} de ce solide par rapport à l'axe (Δ) passant par le centre d'inertie G du solide et parallèle à l'axe (δ) et du produit de la masse m du solide par le carré de la distance d entre les deux axes :

$$J_{\delta} = J_{\Delta} + m \cdot d^2 \quad (4.24)$$



Exemple 4.3

Donner l'expression du moment d'inertie du système ci-dessous, constitué d'une sphère pleine (m , R) et d'un disque plein (m' , R') tels que $m = 2m'$ et $R' = 3R$.



Solution 4.3

Les deux systèmes sphère et disque sont coaxiaux c'est-à-dire ont le même axe de rotation, le moment d'inertie du système J ne sera alors que la somme des moments d'inertie de chaque sous-système.

Soit J_1 le moment d'inertie de la sphère et J_2 , le moment d'inertie du disque :

$$J = J_1 + J_2$$

$$- J_1 = \frac{2}{5} mR^2$$

$$- J_2 = \frac{1}{2} m' R'^2$$

$$\Rightarrow J = \frac{2}{5} mR^2 + \frac{1}{2} m' R'^2$$

$$\text{or } \begin{cases} m = 2m' \\ R' = 3R \end{cases}$$

On a :

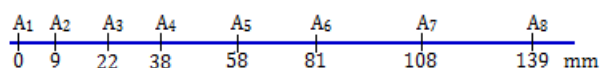
$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{5} mR^2 + \frac{1}{2} m' R'^2 \\ &= \frac{2}{5} mR^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \right) (3R)^2 \\ &= \frac{2}{5} mR^2 + \frac{9}{4} mR^2 \\ &= \frac{53}{20} mR^2 = \frac{1}{10} m' R'^2 \end{aligned}$$


Séance 5

4.5 Détermination expérimentale des vecteurs vitesse et accélération

ACTIVITÉ D'INTÉGRATION

Un mobile de masse $M = 0,60$ kg, reposant sur une table horizontale, est soumis à une force constante $\vec{F}$, de valeur $F = 0,65$ N et de direction parallèle au support. L'ensemble des frottements est assimilable à une force constante $\vec{f}$, parallèle à la trajectoire du mobile. On enregistre les positions du centre d'inertie du mobile toutes les 60 ms. On a reproduit ci-après, une partie réduite de cet enregistrement : ce dernier a été réduit, mais les distances à prendre en compte sont exactes.



- a. Déterminer la valeur de la vitesse aux points A₂, A₃, A₄, A₅, A₆ et A₇.
- b. Représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps; on choisit comme origine des temps, l'instant du passage en A₁.
- c. En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer la valeur de f .

Objectifs

- À partir du graphe, déterminer les caractéristiques (position, sens, direction, intensité) des vecteurs vitesse et accélération.

4.5.1. Cas du vecteur vitesse

À l'instant t , le vecteur vitesse instantanée est donné par le vecteur vitesse moyenne entre les instants $t_1 = t - \theta$ et $t_2 = t + \theta$ (θ = durée très petite)

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{2\theta} \quad (4.24)$$

Pour n-points M, $M_1 M_2 \cdots M_i \cdots M_n$, on a :

$$\begin{cases} t_{i+1} - t_{i-1} = 2\theta \\ t_{i+1} - t_i = \theta \end{cases} \quad (4.25)$$

D'une manière générale, on a :

$$v_i = \frac{M_{i-1} M_{i+1}}{2\theta} \quad (4.26)$$

Pour une mouvement rectiligne, on a :

$$v_{ix} = v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\theta} \quad (4.27)$$

avec i l'indice de position du mobile.



4.5.2. Cas du vecteur accélération

Le vecteur accélération instantanée $\vec{a}$ en un point M à l'instant t , s'obtient grâce à deux positions voisines de M : $M_1 (t_1 ; \vec{v}_1)$; $M_2 (t_2 ; \vec{v}_2)$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \text{ avec } \begin{cases} \Delta t = 2\theta \\ \Delta \vec{v} = \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\| \end{cases} \quad (4.28)$$

Pour un mouvement rectiligne, la mesure algébrique de $\vec{a}_i$ est :

$$a_{ix} = a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\theta} \quad (4.29)$$

Exemple 4.4

Un mobile a une trajectoire rectiligne. On relève la position de centre d'inertie tous les $\theta = 0,1 \text{ s}$, le mobile étant au point 1 à l'instant $t = 0$.



- Calculer la vitesse du mobile aux points 2, 4, 6, 8 et 10.
- Tracer le graphe $v(t)$ d'après les valeurs précédentes.
- En déduire l'accélération du mobile. Comment qualifier ce mouvement ?

Solution 4.4

- Déterminons la vitesse du mobile aux points 2, 4, 6, 8 et 10.

D'après (4.27), on a : $v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\theta}$ avec $i = \{2, 4, 6, 8, 10\}$:

$$- v_2 = \frac{x_3 - x_1}{2\theta} = \frac{1,05}{0,2} = 5,25 \text{ cm.s}^{-1}$$

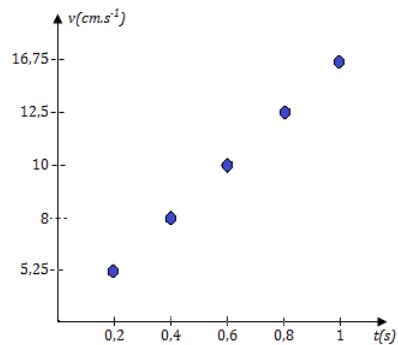
$$- v_4 = \frac{x_5 - x_3}{0,2} = \frac{1,6}{0,2} = 8 \text{ cm.s}^{-1}$$

$$- v_6 = \frac{x_7 - x_5}{0,2} = \frac{2}{0,2} = 10 \text{ cm.s}^{-1}$$

$$- v_8 = \frac{x_9 - x_7}{0,2} = \frac{2,5}{0,2} = 12,5 \text{ cm.s}^{-1}$$

$$- v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{0,2} = \frac{3,35}{0,2} = 16,75 \text{ cm.s}^{-1}$$

- Trçons le graphe $v(t)$



- Le graphe de $v(t)$ est une droite. La pente $\frac{dv}{dt}$ est constante et caractérise l'accélération du mobile. On détermine, graphiquement ou par régression linéaire, sa valeur :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{16,75 - 5,25}{0,2} = 57,5 \text{ cm.s}^{-2}$$

Le mouvement du mobile est rectiligne uniformément accéléré car $a > 0$.

Jeu bilingue

Expression française	English expression	Expression française	English expression
Vitesse	Speed	Vitesse moyenne	Average speed
Accélération	Acceleration	Accélération instantanée	Instantaneous acceleration
Moment cinétique	cinematic moment	Vitesse angulaire	Angular velocity

« The moment of inertia of a solid of mass m with respect to any axis, is equal to sum of the moment of inertia of this solid with respect to its center of inertia and the product of its mass by the square of the distance between the main axis and the secondary axis. »