CHAPITRE VI: DENOMBREMENTS

MOTIVATION :

Etre bien préparé pour des expériences de jeu de hasard pour éviter de se faire tromper ou escroquer par des promoteurs de ces jeux.

INTERET :

Utiliser les outils mathématiques conventionnels pour mieux déterminer le nombre de possibilités dans une expérience de dénombrement.

LECON 1 : COMPLEMENTS SUR LES ENSEMBLES FINIS

Durée: 100 minutes

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

À la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Savoir définir la réunion, l'intersection ainsi que le complémentaire d'un ensemble par rapport à un autre.
- Déterminer le cardinal de l'intersection et de la réunion de deux ensembles finis.
- Déterminer le cardinal de deux ensembles finis connaissant celui de leur réunion et/ou de leur intersection à l'aide du diagramme.
- Déterminer le cardinal du complémentaire d'un ensemble fini.

PRE-REQUIS :

- **Ensemble fini** :

c'est un ensemble qui possède un nombre fini d'élément

- **Cardinal d'un ensemble** : C'est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Si $E = \{a; b; e; f\}$ alors E est un ensemble fini et on a card(E)=4.

- A est un sous ensemble de B ou A et inclus dans B (On note $A \subset B$)

lorsque tout élément de A est un élément de B.

SITUATION PROBLEME :

Afin de dénombrer le nombre d'enfants qui n'aiment aucun des deux sports pratiqués dans un centre de loisirs qui accueille 100 enfants ou deux sports sont proposés : Le football et le tennis. Le directeur de ce centre procède à un sondage et obtient les résultats suivants :

- A la question : Aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.
- A la question : Aimez-vous le tennis ? 45 enfants lèvent la main.

- A la question : Aimez-vous le tennis et le football ? 18 enfants lèvent la main.

Ne sachant plus comment continuer, il fait appel a votre connaissance sur le dénombrement : aider le directeur de ce centre a résoudre ce problème.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 1 :

On donne les ensembles : $E = \{0;1;\ 2;3;\ 4;5;6;7;8;\ 9\}$, $A = \{1;5;\ 9;8\}$ et $B = \{2;5;8;\ 0;4\}$.

1- Représenter le diagramme de VENN traduisant cette situation.
2- Quels sont les cardinaux de chacun de ces ensembles ? Que représentent les ensembles A et B pour l'ensemble E.
3- Déterminer l'ensemble $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B.
4- Déterminer l'ensemble $A \cap B$ des éléments qui sont dans A et dans B.
5- Comparer card$(A \cup B)$ avec $card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
6- Déterminer l'ensemble $\bar{A}$ de éléments qui ne sont pas dans A et l'ensemble $B - A$ des éléments de B qui ne sont pas dans A.
7- Comparer $card\ (\bar{A})$ et $card\ (E) - card\ (A)$, puis $card\ (B - A)$ et $(B) - (A \cap B)$.

<u>Petite conclusion</u> : $\bar{A}$ est appelé complémentaire de A dans E on note aussi C_E^A

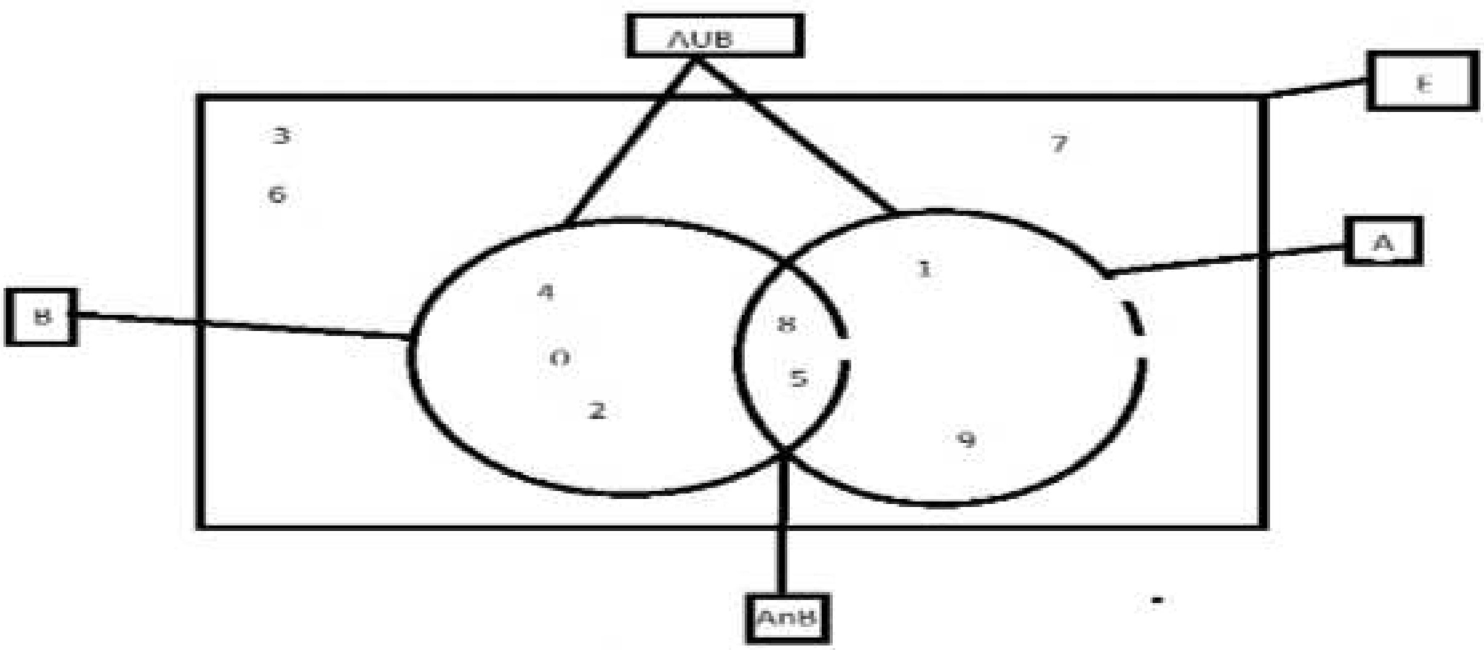
ACTIVITE 2 :

Soit E un ensemble tel que $card\ (E) = 100$, A et B sous-ensembles de E tels que card$(A) = 60$, $card(B) = 45$ et $card(A \cap B) = 18$. Déterminer $card\ (C_E^{A \cup B})$.

Correction de l'activité d'apprentissage :

<u>Activité 1 :</u>

1- Représentons le diagramme de Venn traduisant cette situation :



2- Le cardinal de A est de 4, $card(A) = 4$. Le cardinal de B est de 5, $card(B) = 5$. Les ensembles A et B sont des sous-ensembles de E car tous les éléments de A et B appartiennent à E.

3- $A \cup B = \{0;1;2;4;5;8;9\}$.
4- $A \cap B = \{8;5\}$.
5- Comparons $Card(A \cup B)$ et $Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

On a : $Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 4 + 5 - 2 = 7$.
$\mathrm{Card}(A \cup B) = 7$.

6- On a $\bar{A} = \{0;2;3;4;6;7\}$ et $B - A = \{0;2;4\}$.
- Comparons $Card(E) - Card(A)$ et $Card(\bar{A})$:

On a $Card(E) - Card(A) = 10 - 4 = 6$ et $Card(\bar{A}) = 6$.Ainsi $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$.

- Comparons $Card(B - A) et\ Card(B) - Card(A \cap B)$.

On a $Card(B - A) = 3$ et $Card(B) - Card(A \cap B) = 5 - 2 = 3$. Ainsi $Card(B - A) = Card(B) - Card(A \cap B)$.

Activité 2 :

$card\ (E) = 100$; $\mathrm{card}(A) = 60$, $card(B) = 45$ et $card(A \cap B) = 18$.

Déterminons $card\ (C_E^{A \cup B})$:

$car(C_E^{A \cup B}) = Card(E) - Card(A \cup B)$,or $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B) = 60 + 45 - 18 = 87$.

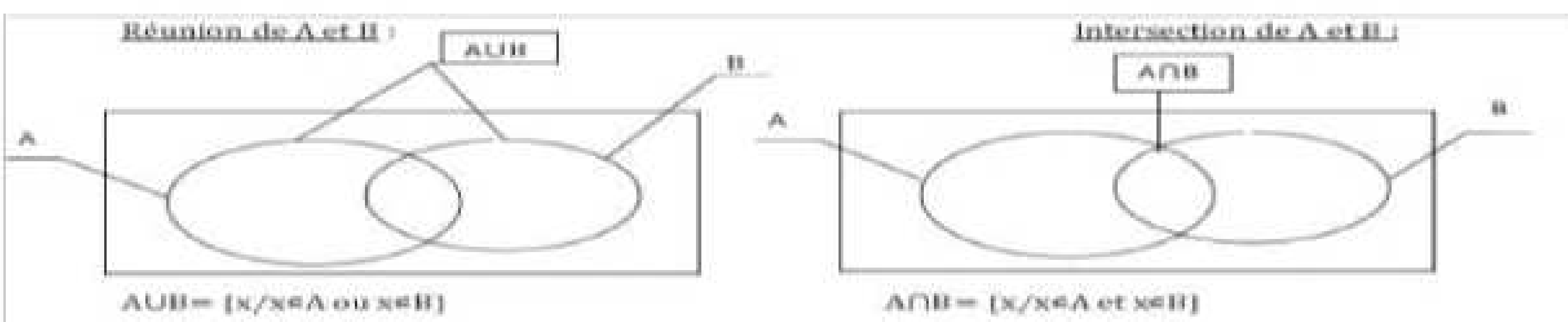
Ainsi $card(C_E^{A \cup B}) = 100 - 87 = 13$.

RESUME :

1- Réunion et Intersection de deux ensembles finis.

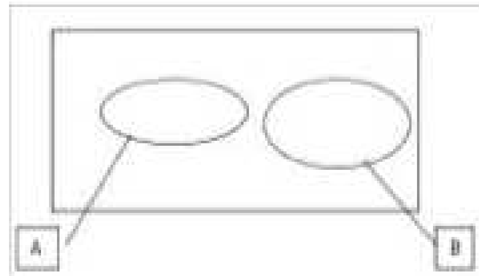
Soient A et B deux ensembles finis.

- La réunion des ensembles A et B noté $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
- L'intersection des ensembles A et B noté $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.



- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
- $card(A \cap B) = card(A) + card(B) - card(A \cup B)$.

NB : Le cardinal de l'ensemble vide ($\emptyset$) est 0.



Remarque :

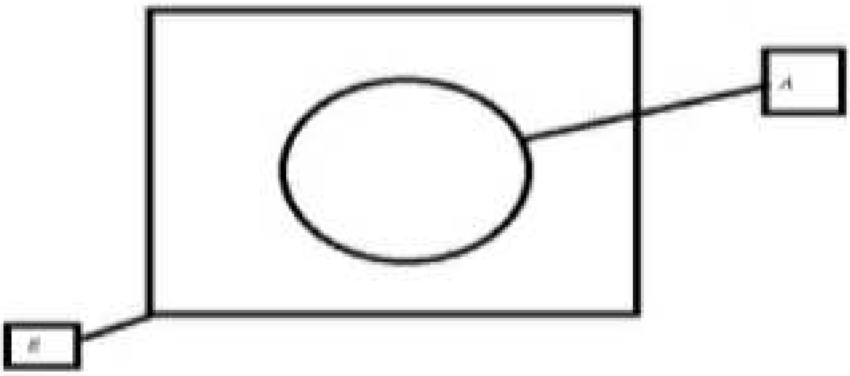
a- Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

b- Lorsque A et B sont disjoints alors $(A \cup B) = (A) + card(B)$

2- Complémentaire d'un ensemble

Soient A et E deux ensembles finis.

- On dit que A est un sous-ensemble de E ou A est inclus dans E (On note $A \subset E$) si tout élément de A appartient à E.

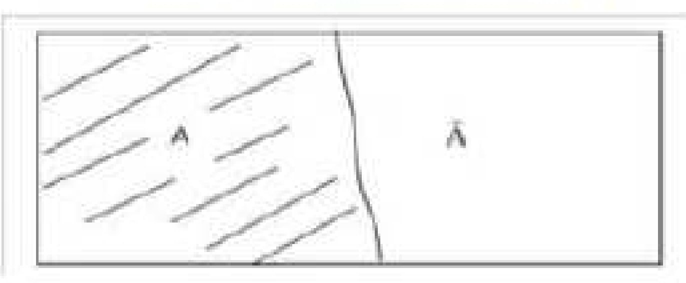


Exemple :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ car tout entier naturel est un nombre réel.

- On appelle complémentaire de A dans E noté $C_E{}^A$ (ou $\bar{A}$ ou $E \setminus A$) l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Complémentaire de A dans E :



Propriété : $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$.

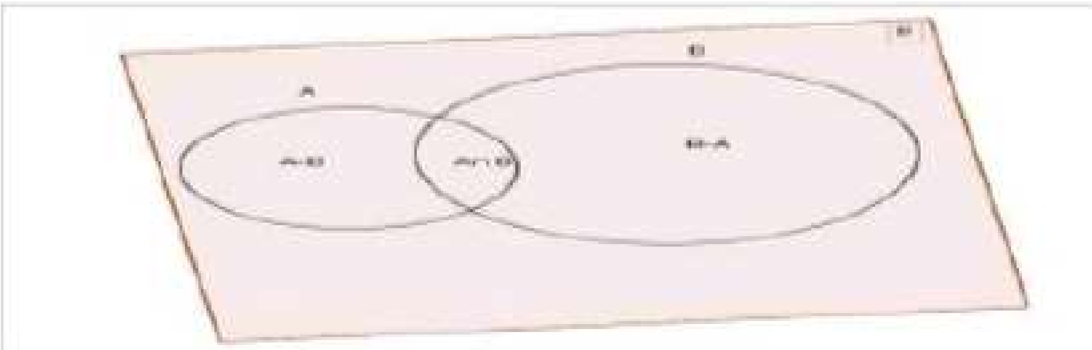
Remarque : Soient A et B deux ensembles non disjoints.

1- $A \cap C_E^A = \emptyset$

2- L'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B est noté $A \setminus B$ et on a :
card$(A \setminus B) = card(A) - card(A \cap B)$.

3- L'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A est noté $B \setminus A$ et on a :

card$(B \setminus A) = card(B) - card(A \cap B)$. Les propriétés vues précédemment peuvent se représenter dans un diagramme appelé diagramme de Venn.



EXERCICE D'APPLICATION :

Dans une classe de première littéraire, 20 élèves pratiquent le Football, 25 élèves pratiquent le Handball, 5 élèves pratiquent le deux sports et 8 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

1- Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent :
   a) Seulement le Football.
   b) Seulement le Handball
   c) Le Football ou le Handball
2- Quel est le nombre d'élèves de cette classe ?

Correction de l'exercice d'application :

Soient F l'ensemble des élèves qui pratiquent le football, H l'ensemble des eleves qui pratiquent le handball.
On a : $Card(F) = 20$; $Card(H) = 25$ et $Card(F \cap H) = 5$.

1- Déterminons le nombre d'élèves qui pratiquent :
   a- seulement le football :

Soit G l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement le football :
On a : $Card(G) = Card(F - H) = Card(F) - Card(F \cap H) = 20 - 5 = 15$.
Ainsi 15 élèves pratiquent seulement le football.

   b- Seulement le handball :

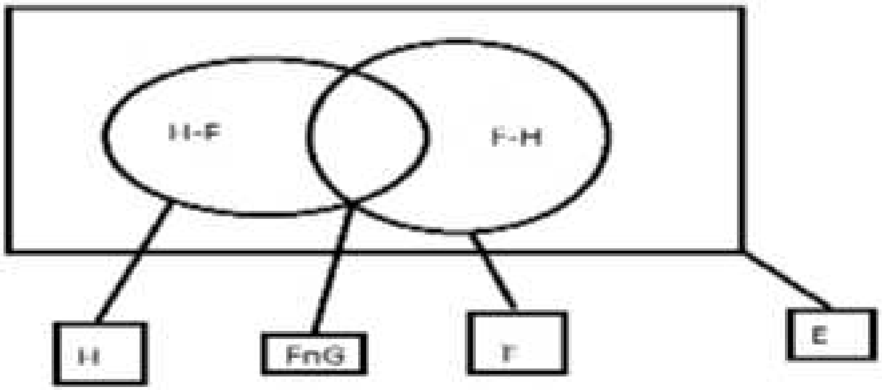
Soit T l'ensemble des élèves qui pratiquent uniquement le handball :
On a : $Card(T) = Card(H - F) = Card(H) - Card(F \cap H) = 25 - 5 = 20$.
Ainsi 20 élèves pratiquent uniquement le handball.

   c- Le football ou le handball

Soit A l'ensemble des élèves qui pratiquent le football ou le handball.
On a : $Card(A) = Card(F \cup H) = Card(F) + Card(H) - Card(F \cap H) = 20 + 25 - 5 = 40$. Ainsi 40 élèves pratiquent le football ou le handball.

2- Déterminons le nombre d'élève de cette salle de classe :

Soit E le nombre d'élèves de cette salle de classe. On a :
$Card(E) = Card(F - H) + Card(H - F) + Card(F \cap H) = 20 + 25 + 5 = 50$.Ainsi cette classe comporte 50 élèves.


H-F
F-H
H
FnG
F
E

LECON 2 : PRODUIT CARTESIEN D'ENSEMBLE

Durée: 100 minutes

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Déterminer (définition et cardinal) le produit cartésien de deux ou plusieurs ensembles finis.
- Utiliser un arbre de choix ou un tableau a double entrée pour dénombrer.

PRE-REQUIS :

SITUATION DE VIE :

Vous êtes invités à un restaurant. Le menu se compose :

- Des sauces : Poulet sauté ; Ndole et sauce d'arachide.
- Des compléments : Plantain ; riz et bâton de manioc

Un plat est constitué d'un complément et d'une sauce. Combien de plat ce restaurant peut-il proposer ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

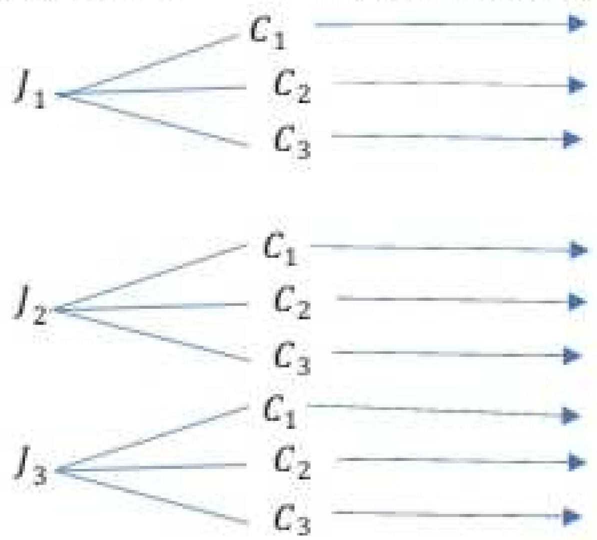
Une femme a dans sa grade robe 3 jupes (J_1; J_2 *et* J_3) et 3 chemisiers (C_1 ; C_2 C_3). Elle souhaite s'habiller en portant une jupe et un chemisier. A l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre de choix, déterminer le nombre de façons différentes dont elle peut s'habiller.

Utilisation de l'arbre de choix :

On donne les ensembles A et B suivants : $A = \{J_1; J_2 ; J_3\}$ et $B = \{C_1; C_2; C_3\}$.

1- Complete en colonnes l'arbre de choix suivant :

Eléments de A Eléments de B Couples Obtenus



2- Déterminer l'ensemble $A \times B$ de tous les couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$.

3- Comparer card$(A \times B)$ et $card(A) \times card(B)$.

4- Déterminer le nombre d'habillement possible.

Utilisation du tableau a double entrée :

B \ A	J_1	J_2	J_3
C_1			
C_2			

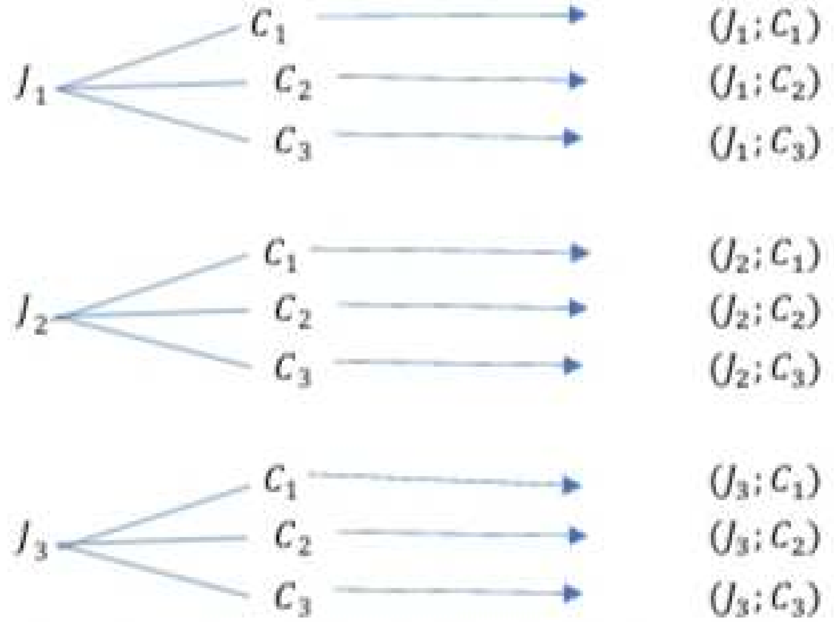
1- Déterminer le nombre d'habillement possible

Correction de l'activité d'apprentissage :

- Utilisation de l'arbre de choix

1- Complétons en colonnes l'arbre de choix suivant :

Eléments de A Eléments de B Couples Obtenus



2- Déterminons l'ensemble $A \times B$ de tous les couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$:

$A \times B = \{(J_1; C_1); (J_1; C_2); (J_1; C_3); (J_2; C_1); (J_2; C_2); (J_2; C_3); (J_3; C_1); (J_3; C_2); (J_3; C_3)\}$

3- Comparons card$(A \times B)$ et $card(A) \times card(B)$:

On a : $card(A) \times card(B) = 3 \times 3 = 9$ et $card(A \times B) = 9$. Ainsi $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$.

4- Déterminons le nombre d'habillement possible.

Un habillement correspond a un choix d'une jupe et d'un chemisier. Ainsi le nombre d'habillement possible est égal au $card(A \times B) = 9$ habillements possibles.

- *Utilisation du tableau à double entrée*

Complétons le tableau à double entrée suivant :

A \ B	C_1	C_2	C_3
J_1	$(J_1;C_1)$	$(J_2;C_1)$	$(J_3;C_1)$
J_2	$(J_1;C_2)$	$(J_2;C_2)$	$(J_3;C_2)$
J_3	$(J_1;C_3)$	$(J_2;C_3)$	$(J_3;C_3)$

1- Déterminons le nombre d'habillement possible :

Le nombre d'habillement possible est de 9.

RESUME :

Définition : Etant donné deux ensembles finis A et B, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Il est noté noté $A \times B$ et on lit A croix B

Propriété : Card(A × B) = Card(A) × Card(B)

Exemple : On donne les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1; 2\}$

$card(A) = 3$; $card(B) = 2$ donc $card(A \times B) = 3 \times 2 = 6$.

$(a; 1)$; $(b; 2)$ et $(c; 1)$ sont des éléments de $A \times B$.

Remarque : Soient $E_1, E_2, \dots, E_p, p$ ensemble finis ($p \in \mathbb{N}^*$) alors :

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des éléments sous la forme $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ tels que $x_1 \in E_1$; $x_2 \in E_2$;…. ; $x_p \in E_p$ et on a $card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \dots \times card(E_p)$.
- Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_p = E$ alors $card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = card(E^p) = card(E) \times card(E) \times \dots \times card(E) = (card(E))^p$.

Vocabulaire: Un élément de $E^p (p \geq 2)$ est de la forme $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ et est appelé p-uplets ou p-listes.

Exemple :

Si $E = \{1; 2; 3; 4\}$ alors :

- Elément de $E^2 = E \times E$: $(1; 4)$; $(1; 1)$……... sont des couples ou des 2-uplets.
- Eléments de $E^3 = E \times E \times E$: $(1; 2; 2)$; $(3; 2; 4)$…… sont des triplets ou 3-uplets.

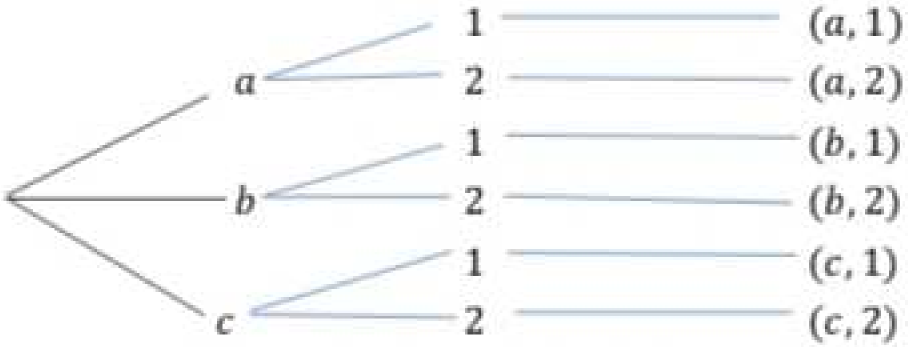
Définition :

Un arbre de choix est un schéma désignant le divers réultats d'une expérience a partir des divers ramification des étapes de sa réalisation.

Un résulatt est une branche de l'arbre comportant les étapes de réalisation.

Exemple :

On donne les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1; 2\}$. Listons tous les éléments de $A \times B$ a l'aide d'un arbre de choix :



$A \times B = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); \ (c, 1); \ (c, 2)\}$

- Un tableau a double entrée est un tableau possédant un certain nombre de ligne et de colonnes. On peut l'utiliser pour illutrer une situation de choix et effectuer un dénombrement.

Exemple :

On donne les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1; 2\}$. Listons tous les éléments de $A \times B$ a l'aide d'un tableau a double entrée:

A / B	a	b	c
1	$(a, 1)$	$(b, 1)$	$(c, 1)$
2	$(a, 2)$	$(b, 2)$	$(c, 2)$

Exercice d'application :

1- Dans un examen, on propose trois exercices de mathématiques et quatre exercices de francais. Un sujet est composé d'un exercice de mathématiques et d'un exercice de francais. Combien de sujets peut-on ainsi obtenir? A l'aide d'un tableau a double entrée énumérer tous les sujets possibles.

2- Une femme a dans sa pandérie quatre jupes, cinq chemises et sept vestons. Pour s'habiller, elle choisit au haard une jupe, une chemie et un veston. De combien de facons différentes peut-elle s'habiller ?

3- Quatre amis vont a une soirée et devraient etre accompagné de son épouse. A la derniere minute une épouse est indisponible et ne peut accompagner son mari. A l'ouverture de la soirée dansante, les quatre amis forment des couples composée d'un homme et d'une femme.

a) Combien de couple peut-on former ?

b) Utuliser un arbre de choix pour énnumérer tous les couples possibles.

c) Combien peut-on former de couples tels qu'un homme ne danse pas avec sa femme ?

d)

Correction de l'exercice d'application :

1- Soit M l'ensemble des exercices mathématiques alors $card(M) = 3$ et F l'ensemble des exercices de français, on a $card(F) = 4$. Un sujet est composé d'un élément de M et d'un élément de F donc un élément du produit cartésien $M \times F$ ainsi le nombre de sujets possibles est alors égal au nombre d'éléments de $M \times F$ d'où le nombre de sujets que l'on peut ainsi obtenir est :

$card(M \times F) = card(M) \times card(F) = 3 \times 4 = 12.$

Enumérons tous les sujets possibles avec un tableau à double entrée :

On a : $M = \{M_1; M_2; M_3\}$ et $F = \{F_1; F_2; F_3; F_4\}$.

F / M	F_1	F_2	F_3	F_4
M_1	(M_1, F_1)	(M_1, F_2)	(M_1, F_3)	(M_1, F_4)
M_2	(M_2, F_1)	(M_2, F_2)	(M_2, F_3)	(M_2, F_4)
M_3	(M_3, F_1)	(M_3, F_2)	(M_3, F_3)	(M_3, F_4)

2- Soient J l'ensemble de jupe alors $card(J) = 4$, C l'ensemble des chemises, on a $card(C) = 5$ et V l'ensemble des vestons alors $card(V) = 7$. Un habillement est composé d'un élément de J, d'un élément de C et d'un élément de V donc un élément du produit cartésien $J \times C \times V$ainsi le nombre d'habillement possibles est alors égal au nombre d'éléments de $J \times C \times V$ d'où le nombre d'habillements que l'on peut ainsi obtenir est :

$$card(J \times C \times V) = card(J) \times card(C) \times card(V) = 4 \times 5 \times 7 = 140$$

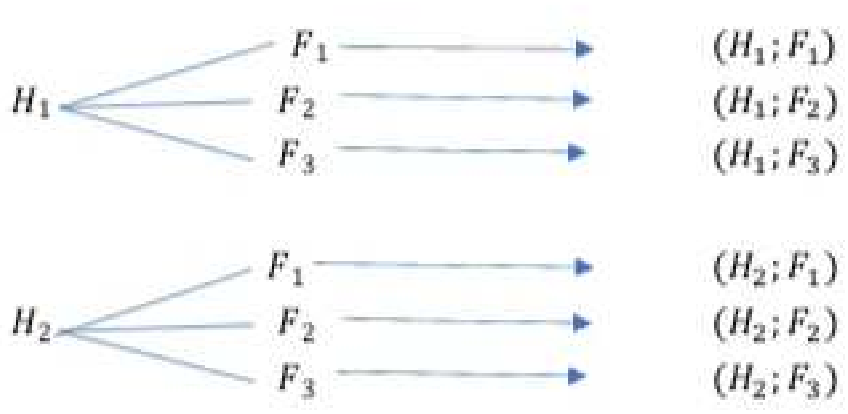
3-

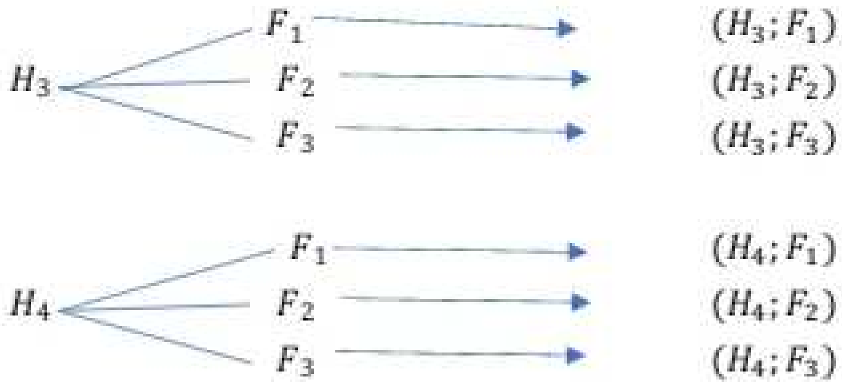
a) Déterminons le nombre de couples que l'on peut former :

Soient H l'ensemble des hommes et F l'ensemble des femmes présentent à la soirée dansante on a $card(H) = 4$ et $card(F) = 3$. Un couple est composé d'un élément de H et d'un élément de F donc un élément du produit cartésien $H \times F$ ainsi le nombre de couples possibles est égal aux nombres d'éléments de $H \times F$. Ainsi le nombre de couples possibles est : $card(H \times F) = 4 \times 3 = 12$.

b) Utilisons un arbre de choix pour énumérer tous les couples possibles :

On a: $H = \{H_1; H_2; H_3; H_4\}$ et $F = \{F_1; F_2; F_3\}$.





Les couples obtenus sont :

$$\{(H_1;F_1);(H_1;F_2);(H_1;F_3);(H_2;F_1);(H_2;F_2);(H_2;F_3);(H_3;F_1);(H_3;F_2);(H_3;F_3);(H_4;F_1);(H_4;F_2);(H_4;F_3)\}$$

c) Déterminons le nombre de couples couples tels qu'un homme ne danse pas avec sa femme :

Pour obtenir de tels couples on enlèvera dans le nombre total de couple le nombre de couple ou un homme danse avec sa femme. Ainsi le nombre de couple tel qu'un homme ne danse pas avec sa femme est de : $12 - 3 = 9$.