



## Leçon 6

## CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

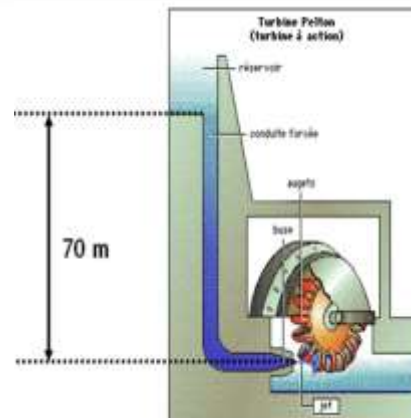


## ACTIVITÉS

Activité

On place une turbine sous le niveau d'un réservoir d'eau afin de transformer l'**énergie potentielle** de l'eau en **énergie de mouvement** capable de faire tourner la turbine qui produira l'électricité.

Comment expliquer ce mécanisme ?

Objectifs

- ➔ Définir et exprimer l'énergie potentielle d'un système
- ➔ Définir et exprimer l'énergie mécanique d'un système
- ➔ Énoncer et appliquer la loi de conservation de l'énergie mécanique

1. Définition et notation de l'énergie mécanique1.1. Définitions

- Le TEC suggère la possibilité de communiquer de l'énergie cinétique à un solide. Ce dernier est alors en mouvement ; il existe une autre forme d'énergie qui est liée à la **position** d'un système ou à sa **déformation**. Cette énergie, utilisée à un instant favorable, est une énergie en "**puissance**" appelée **énergie potentielle**.
- L'**énergie mécanique**  $E_M$  ou  $E$  se subdivise en deux types d'énergies à savoir :
  - L'**énergie cinétique** notée  $E_C$  qui est liée à la vitesse d'un corps au cours de son déplacement dans un repère d'espace ;
  - L'**énergie potentielle** notée  $E_P$  qui est liée à la variation relative des positions du système dans son mouvement dans un repère d'espace.

1.2. Symbole et unité

- L'énergie mécanique est notée  $E$  ou  $E_M$ . Elle est obtenue en faisant la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles :
 
$$E = E_C + \Sigma E_P \quad (6.1)$$
- Étant donné que l'énergie mécanique est la somme des énergies exprimées en Joules, on en déduit alors que, l'énergie mécanique s'exprime en Joules.

2. Notion d'énergie potentielle2.1. Définition et présentation

- L'**énergie potentielle** notée  $E_P$  qui est liée à la variation relative des positions du système dans son mouvement dans un repère d'espace.



- L'**énergie potentielle** est aussi l'énergie que possède un système du fait des positions relatives de ses parties en interaction.
- L'énergie potentielle s'exprime aussi en Joule.

## 2.2. Les types d'énergie potentielle

### 2.2.1. Énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}$

- L'**énergie potentielle de pesanteur** est l'énergie que possède un système, lorsqu'une de ses parties est la Terre.
- Cette énergie n'est alors rien d'autre que le travail du poids d'un corps.
- Expression de l'énergie potentielle de pesanteur  
Considérons pour cela, la figure ci-dessous :

- Sur la figure 6.1, pour rouler la bille de masse  $m$  vers le haut de la pente, il faut travailler contre le poids de la bille.

- L'énergie potentielle accumulée est alors égale au travail qu'il faut fournir pour amener la bille d'une position de référence d'altitude  $Z_{réf}$  à un autre niveau d'altitude  $Z_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), dans un champ de pesanteur supposé uniforme.

$$\text{On a alors : } \Delta E_{pp} = -\Delta W(\vec{P}) \Leftrightarrow E_{pp-1} - \underbrace{E_{pp-réf}}_0 = W(\vec{P}_1) - W(\vec{P}_{réf})$$

$$\Rightarrow E_{pp-1} = m \times g \times (Z_1 - Z_{réf})$$

De même,

$$E_{pp-2} = m \times g \times (Z_2 - Z_{réf})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ en kg} \\ g \text{ en N/kg} \\ Z \text{ en m} \end{array} \right.$$

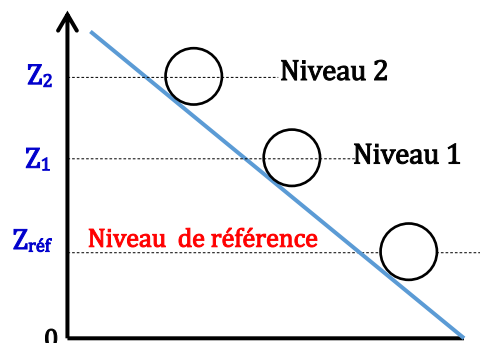


Figure 6.1

### Remarque

- ✍ L'énergie potentielle est une grandeur scalaire algébrique.
- ✍ L'énergie potentielle est définie à une constante additive près qui dépend du choix de l'origine de l'axe vertical :

$$\text{On écrit : } E_{pp} = m \times g \times Z + \text{constante (où } Z \text{ est la cote ou l'altitude)} \quad (6.2)$$

$$\text{En effet, } E_{pp} = mg(Z - Z_{réf}) = mgZ - mgZ_{réf} \Rightarrow E_{pp} = mgZ + \text{cste avec } \text{cste} = -mgZ_{réf}. \quad (6.3)$$

- ✍ L'énergie est **nulle** au niveau pris comme état de référence.
- ✍ L'énergie potentielle est **positive** au-dessus du niveau de référence et **négative** dans le cas contraire.

$$\text{Quel que soit le niveau de référence choisi, } \Delta E_p = \text{constante} \quad (6.4)$$

✍ Conséquence : la variation de l' $E_{pp}$  est indépendante de la référence choisie :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{pA} = mgz_A \\ E_{pB} = mgz_B \end{array} \right. \Rightarrow E_{pA} - E_{pB} = mg(z_A - z_B) = \Delta E_{pp} \quad (6.5)$$

### Exemple

Une flèche, de masse  $m = 100\text{g}$ , est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse  $v = 25\text{m/s}$ . On néglige les frottements de l'air.

- Quelle est l'énergie cinétique initiale de la flèche ?
- Comparer littéralement les variations d'énergies cinétique et potentielle de la flèche entre son point de lancement et le sommet de sa trajectoire.
- En déduire l'altitude maximale atteinte par la flèche.

### Solution

Considérons la figure 3.2 ci-dessous et supposons que la flèche est en sens inverse i.e. de B vers A

- D'après la formule 2.1 du chapitre précédent et en AN,  $E_c = 31,25 \text{ J}$ .

- b) Comparaison :  $\Delta E_C = E_{CA} - E_{CB} = mgh$  or  $E_{PA} = 0 \text{ J} \Rightarrow \Delta E_C = - E_{CB}$  (\*)  
 $\Delta E_P = E_{PB} - E_{PA} = mg(X_B - X_A) = mgh \Rightarrow \Delta E_P = - \Delta E_C = E_C$ . (\*\*)  
c) En exploitant (\*) et (\*\*), déterminons h.  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .  

$$\Delta E_P = mgh = E_C \Rightarrow h = \frac{E_C}{mg} = 31.9 \text{ m}$$

### 2.2.2. Énergies potentielles élastiques $E_{pe}$

#### 2.2.2.1. Énergie potentielle élastique due à la déformation d'un ressort

##### ♦ Définition

L'**élasticité** est la propriété d'un corps qui peut se déformer sous l'effort et reprendre sa forme initiale lorsque l'effort de déformation est supprimé.

- ♦ Déformation de compression ou de détente d'un ressort

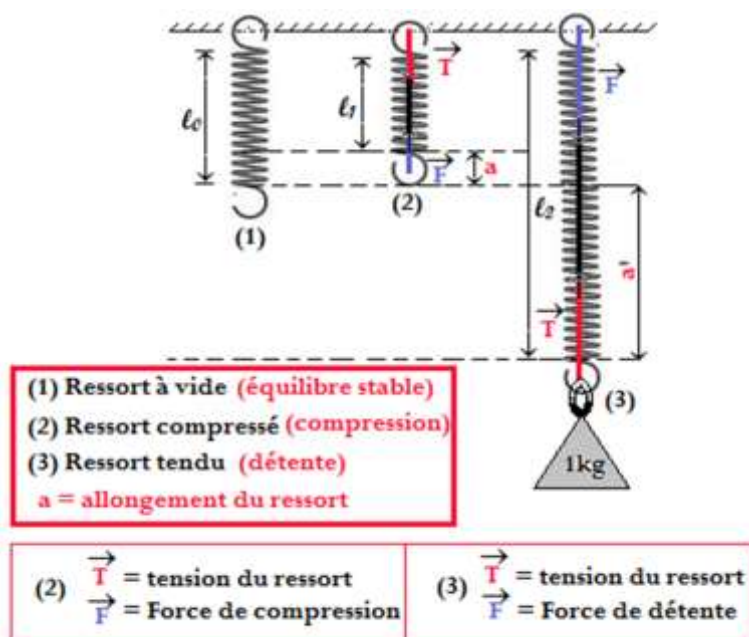


Figure 6.2 : Ressort allongé - comprimé verticalement

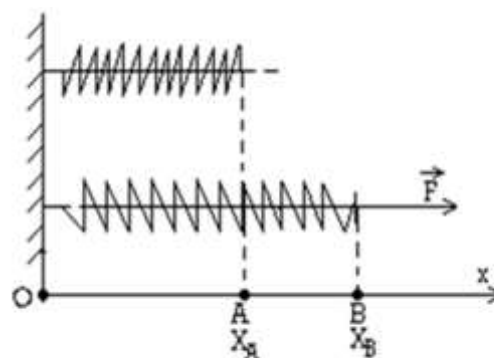


Figure 6.3 : Ressort allongé horizontalement

L'**énergie potentielle** élastique notée  $E_{pe}$ , est une énergie de déformation i.e. celle liée à l'**élasticité**.

- En considérant les situations (1) et (2) de la figure 6.2, l'énergie potentielle élastique est donnée par :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} k (\ell_0 - \ell_1)^2 = \frac{1}{2} k a^2 \quad (\text{Compression - raccourcissement}) \quad (6.6)$$

- En considérant les situations (1) et (3) de la figure 6.2 (il en est de même avec la figure 6.3), l'énergie potentielle élastique est donnée par :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} k (\ell_2 - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k a'^2 \quad (\text{Détente - élongation - allongement}) \quad (6.7)$$

- En combinant les systèmes (1), (2) et (3) de la figure 6.2, on trouve :

$$\ell_1 + \ell_2 = 2\ell_0 \quad (6.8)$$

**Unités** : **k** (constante de raideur du ressort) en  $\text{N.m}^{-1}$ ;  $\ell_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) et (**a**, **a'**) en mètres (m).

##### Exemple

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin. Ses capacités physiques sont remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante : le Marsupilami peut notamment sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.



On note  $\ell_0 = 2\text{ m}$ , la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur minimale du ressort est  $\ell_m = 50\text{ cm}$ . On supposera que la Marsupilami pèse  $50\text{ kg}$ , et que sa queue quitte le sol, lorsque le ressort mesure  $\ell_0$ .

- Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur  $h = 10\text{ m}$ .
- Quelle est la vitesse du Marsupilami lorsque sa queue quitte le sol ?

### Solution

Données :  $\ell_0 = 2\text{ m}$  ;  $\ell_m = 50\text{ cm}$  ;  $m = 50\text{ kg}$  ;  $h = 10\text{ m}$  ;  $g = 9,8\text{ N.kg}^{-1}$  : phénomène de raccourcissement

(a) Déterminons la constante de raideur  $k_M$  du Marsupilami.

Nous avons vu que :  $E_{pe} = W(\vec{P}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} k_M (\ell_0 - \ell_m)^2 = mgh$  (égalité à justifier plus bas)

$$\Rightarrow k_M = \frac{2mgh}{(\ell_0 - \ell_m)^2} \quad \underline{\text{AN}} : k_M = 4,4 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1} = 4,4 \text{ kN.m}^{-1}.$$

(b) Déterminons la vitesse  $V$  du Marsupilami au moment où sa queue quitte le sol.

Nous exploitons pour cela, le TEC :  $\Delta E_C = W(\vec{P})_{\ell_0}^h = \Delta E_{pp} \Leftrightarrow \frac{1}{2} mV^2 = mg(h - \ell_0)$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2g(h - \ell_0)} \quad \underline{\text{AN}} : V = 12,52 \text{ m.s}^{-1} \approx 13 \text{ m.s}^{-1}.$$

### 2.2.2.2. Énergie potentielle de torsion

Un fil élastique de constante de torsion  $C$  ( $\text{N.m.rad}^{-1}$ ) ayant subi une torsion d'angle  $\theta$  [en radians] (figure 6.4), possède de l'**énergie potentielle élastique** dont l'expression est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} C \theta^2 \quad (6.9)$$

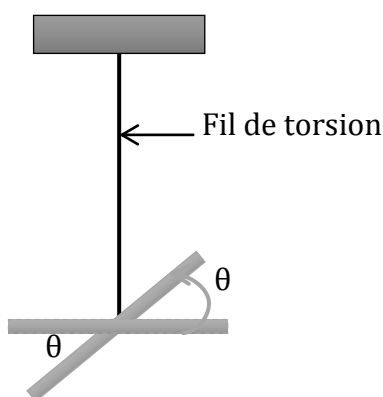


Figure 6.4 : Torsion d'un fil

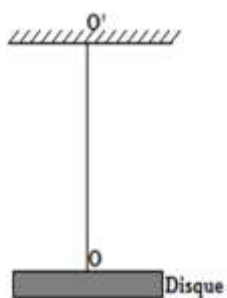
### Remarque

- La formule (6.9) est aussi applicable au ressort spiral.
- Les énergies potentielles sont toujours des grandeurs physiques.
- L'énergie potentielle d'un système est égale à la somme algébrique de toutes les énergies potentielles dudit système :

$$E_P = E_{pp} + E_{pe} + \dots \quad (6.10)$$

### Exemple

Soit le système ci-dessous :



Un disque homogène de masse  $m = 1,8\text{ kg}$  et de rayon  $R = 10\text{ cm}$ , est suspendu horizontalement par un fil de torsion de constante de torsion  $C = 0,5\text{ N.m.rad}^{-1}$ , dont l'une des extrémités au centre  $O$  du disque et l'autre est encastrée en  $O'$ . À partir de sa position d'équilibre, on tourne le disque autour de  $OO'$  d'un angle  $\theta_m = \pi\text{ rad}$  et on le maintient dans cette position.

Calculer dans cette position, l'énergie potentielle du système {fil - disque}.

### Solution

Données :  $R = 0,1 \text{ m}$  ;  $m = 1,8 \text{ kg}$  ;  $C = 0,5 \text{ N.m.rad}^{-1}$  ;  $\theta_m = \pi \text{ rad} \cong 180^\circ$ .

Calculons l'énergie potentielle  $E_{Pe}$ .

$$E_p = E_{Pe} = (C \times \theta_m^2)/2$$

$$\Rightarrow E_{Pe} = (C \times \theta_m^2)/2 = 2,47 \text{ J.}$$

### 2.2.3. Puits et barrière d'énergie potentielle (univ.)

## 3. L'énergie mécanique

Nous avons défini au paragraphe 1.2 que l'énergie mécanique est la somme des énergies cinétique et potentielle.

### 3.1. Transformation mutuelle des énergies

- Lorsqu'un ressort comprime horizontalement un solide et le lâche sans vitesse initiale, l'énergie potentielle élastique du ressort se transforme en énergie cinétique :  $E_{Pe} = E_C$  (6.11)
- Lorsqu'un ressort comprime verticalement un solide et la lâche sans vitesse initiale, l'énergie potentielle élastique du ressort se transforme d'abord en énergie cinétique, qui à son tour, se transforme en énergie potentielle de pesanteur avant de retomber :  $E_{Pe} = E_C = E_{Pp}$  (6.12)
- Lorsqu'un objet tombe en chute libre du haut d'un édifice de hauteur  $h$ , l'énergie potentielle de pesanteur se transforme en énergie cinétique :  $E_{Pp} = E_C$  (6.13)

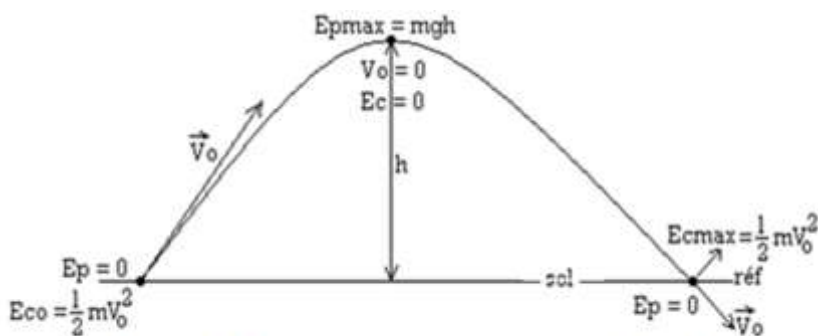


Figure 6.6 : Transformation mutuelle  $E_C$  en  $E_{Pp}$

### Conclusion

Une **perte** en énergie cinétique correspond à un **gain** en énergie potentielle et réciproquement. Raison pour laquelle on dit que les énergies potentielle et cinétique se transforment mutuellement selon l'équation :  $E_C \rightleftharpoons E_{Pp}$

- Lorsqu'un système n'est soumis qu'à l'action des forces de frottement au cours de son mouvement, l'énergie cinétique de ce dernier se transforme en chaleur :  $E_C = Q$  (6.14)
- Dans les barrages hydroélectriques, l'énergie potentielle de pesanteur (chute d'eau), se transforme en énergie électrique :  $E_{Pp} = W_{\text{électrique}}$  (6.15)

Ces différentes transformations mutuelles d'énergie, justifient l'affirmation suivante :

« *L'énergie ne se perd pas, l'énergie ne se crée pas, elle transforme tout simplement d'une forme à l'autre* »

### 3.2. Systèmes conservatifs

- Un système est dit conservatif, lorsqu'au cours du temps, son énergie mécanique ne change pas. On dit aussi que ce système est soumis à des forces conservatives.



Preuve : 
$$\begin{cases} E_1 = E_{C_1} + E_{P_1} \\ E_2 = E_{C_2} + E_{P_2} \end{cases} \xrightarrow{\text{conservation}} E_2 - E_1 = \Delta E = 0 \Leftrightarrow \Delta E = -\sum \Delta E_p \quad (6.16)$$

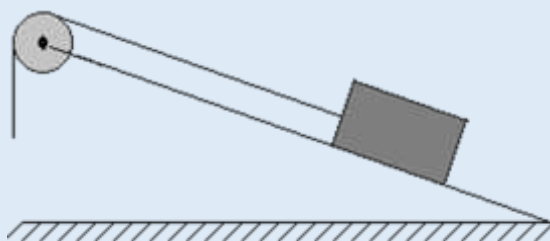
**Principe de conservation de l'énergie mécanique** : « L'énergie mécanique  $E$  d'un système isolé ou pseudo-isolé, en l'absence de frottements intérieurs à l'échelle macroscopique, se conserve :  $\forall t, E = E_C + \sum E_P = \text{cste} \Rightarrow \Delta E = \Delta E_C + \sum \Delta E_P = 0$  il en découle alors que :  $\Delta E = -\Delta E_P$  »

### Remarque

Si la formule 6.16 est vérifiée pour tout instant  $t$ , alors le système est dit **conservatif**.

### Exemple

On tire à l'aide d'un treuil un bloc de granite de masse  $m = 50\text{ kg}$ , posé sur un plan incliné de  $30^\circ$  par rapport à l'horizontal. L'intensité de la force de traction exercée par le treuil est  $F = 300\text{ N}$ .



- Représenter et faire le bilan des forces qui s'exercent sur le bloc.
- Lorsque le solide se déplace sur une distance de  $70\text{ cm}$ , calculer le travail de chacune des forces identifiées.
- Déterminer la variation des énergies cinétique, potentielle et mécanique sur ce parcours.
- Calculer la puissance de la force motrice, lorsque le déplacement de  $70\text{ cm}$  s'effectue en  $3\text{ min}$ .

### Solution

Données :  $m = 50\text{ kg}$  ;  $F = 300\text{ N}$  ;  $\alpha = 30^\circ$  ;

- (a) Bilan des forces appliquées sur le bloc : 
$$\begin{cases} \vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y : \text{poids du bloc} \\ \vec{F} : \text{force de traction} \\ \vec{R} : \text{réaction du plan incliné} \end{cases}$$
- (b) Calcul des travaux de chaque force pour un déplacement  $d = 70\text{ cm} = 0,7\text{ m}$ .
- $W(\vec{P}) = W(\vec{P}_x) = -m \times g \times d \times \sin \alpha = -171,5\text{ J}$
  - $W(\vec{F}) = F \cdot d = 210\text{ J}$
  - $W(\vec{R}) = 0\text{ J}$
- (c) Déterminons  $\Delta E_C$  ;  $\Delta E_{PP}$  ;  $\Delta E$  sur  $d = 0,7\text{ m}$ .
- $\Delta E_C = W(P) + W(F) + W(R) = 38,5\text{ J}$ .
  - $\Delta E_{PP} = W(P) = 171,5\text{ J}$ .
  - $\Delta E = \Delta E_C + \Delta E_{PP} = 210\text{ J}$ .
- (d) Calculons la puissance  $P$  si  $t = 3\text{ min} = 180\text{ s}$ .

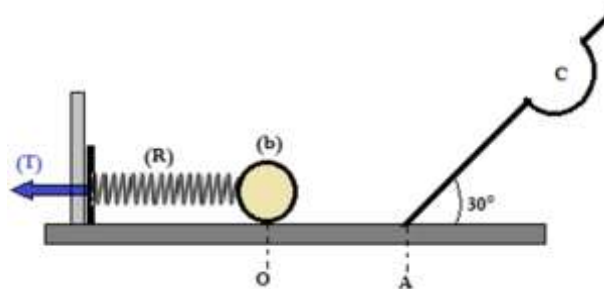
Par définition, 
$$P = \frac{W(\vec{F})}{t} = 1,17\text{ J}.$$

### 3.3. Systèmes non conservatifs

- Un système est dit non conservatif, lorsque son énergie mécanique change au cours du temps.
- Si l'on tient compte des **forces de frottement**, il n'y aura plus conservation de l' $E_M$ . La variation correspondra dès lors à la chaleur dégagée : c'est l'énergie calorifique :  $\Delta E_M = Q = W(\vec{f})$  (**système non conservatif**) (6.17)

## Exemple

On considère la figure ci-dessous.



Un jeu consiste à introduire une bille (b) dans une cavité C, comme l'indique la figure ci-dessus. Le principe du jeu est simple : le ressort (R) est comprimé par un joueur par l'intermédiaire d'une tirette (T) de masse négligeable.

La bille (b) de masse  $m = 250 \text{ g}$ , assimilable à un point matériel, est appliquée contre le ressort comprimé. Le joueur tire sur la tirette qui maintient le ressort, puis observe le mouvement de la bille ; il gagne le jeu si la bille vient à se loger dans la cavité C. le ressort est à spires non jointives et de masse négligeable. Sachant que la raideur du ressort est  $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$ , le déplacement  $AC = 1 \text{ m}$ . Le joueur comprime le ressort de  $x = 10 \text{ cm}$ . Les forces de frottement sont négligées dans tout l'exercice.

- (1) Exprimer, puis calculer, l'énergie emmagasinée par le ressort
- (2) Sachant qu'au moment où le joueur lâche la tirette, toute l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique, qui permet alors à la bille de décoller, exprimer, puis calculer la valeur  $V_0$  de la vitesse initiale de la bille.
- (3) Représenter les forces qui s'exercent sur la bille lorsqu'elle passe sur les tronçons OA et AC.
- (4) Déterminer la vitesse de la bille en A.
- (5) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la distance  $AC'$  parcourue par la bille sur le trajet AC avant de s'arrêter. En comparant AC et  $AC'$ , dire si le joueur gagne le jeu.
- (6) Sinon, déterminer le raccourcissement maximale  $x_{\max}$  qu'il faudrait imposer au ressort pour gagner ce jeu en supposant que la vitesse de la bille est nulle, lorsqu'elle atteint C.

## Solution

Données :  $m = 0,25 \text{ kg}$  ;  $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$  ;  $AC = 1 \text{ m}$  ;  $x = 0,1 \text{ m}$ .

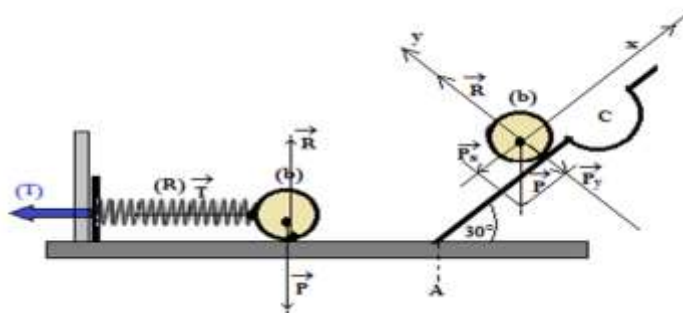
- (1) Calculons  $E_{pe}$ .

$$\text{Par définition, } E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 = 0,2 \text{ J}$$

- (2) Calculons  $V_0$ .

$$\text{On a : } E_C = E_{pe} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2E_{pe}}{m}} = 1,26 \text{ m.s}^{-1}.$$

- (3) Figure illustrative.





(4) Déterminons la vitesse de la bille en A.

$$\text{TEC : } E_{CA} - E_{CO} = 0 \Rightarrow V_A = V_0 = 1,26 \text{ m.s}^{-1}.$$

(5) Calculons la distance AC'.

$$\text{TEC : } E_{CC'} - E_{CA} = -mgAC'\sin 30^\circ \text{ or } E_{CC'} = 0 \text{ J et } \sin 30^\circ = 0,5 ; E_{CA} = (mV_A^2) / 2 \\ \Rightarrow AC' = V_A^2 / g = 0,162 \text{ m.}$$

$AC' < AC \Rightarrow$  le solide n'atteint pas le point C. Donc le joueur perd son jeu.

(6) Calculons le raccourcissement maximale  $x_{\max}$  permettant au joueur d'atteindre C.

$$\text{On a : } E_{Pe} = E_{PP} \Leftrightarrow (kx_{\max}^2)/2 = mgAC\sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{m \times g \times AC}{k}} = 0,25 \text{ m.}$$

#### 4. Jeu bilingue

| Expression française  | English expression       |
|-----------------------|--------------------------|
| Énergie potentielle   | Potential energy         |
| Énergie mécanique     | Mechanical energy        |
| Puits de potentiel    | Well (or hole) potential |
| Barrière de potentiel | Potential barrier        |

#### Sentence:

The sum of the kinetic and potential energies in a system is called the total **mechanical energy**. An **ideal mechanical system** is a closed system in which no friction or other non-conservative force acts.

#### Phrase :

La somme des énergies cinétique et potentielle dans un système est appelée **énergie mécanique totale** du système. Un système mécanique idéal est un système dans lequel il n'y existe ni force de frottement ni de forces non conservatives.

#### Sentence:

When a system is acted upon by a non-conservative force, such as friction, it is called a **non-ideal mechanical system**. The **total energy** of a non-ideal system is given by this formula:

$$E_T = PE + KE + Q \quad (6.18)$$

Where  $E_T$  represents the total energy,  $PE$  is potential energy,  $KE$  is kinetic energy, and  $Q$  is the internal energy. All quantities are expressed in joules.

