



Leçon 4

TRAVAIL D'UNE FORCE

Activité 1

Deux élèves A et B de première se disputent dans la cour de récréation de leur établissement, lorsque ceux-ci observent par un trou du mur du campus, une femme placée avec un sceau plein d'eau à l'intérieur et qu'ils parvenaient à observer qu'elle coulait aussi de la sueur.

ACTIVITÉS

- ♦ L'enfant A : Man, je te jure la mater si work, sans blague.
- ♦ L'enfant B : No, elle ne work pas, louche, elle est tenue debout là, elle n'avance pas ; donc elle ne bosse pas.
- ♦ L'enfant A : Tu ndem gars, ya la sueur que la mater là coule, toi tu dis qu'elle ne bosse pas ? il faut qu'on nettoie tes yeux là avec du javel.
- ♦ L'enfant B : C'est plutôt toi qui ndem I swear ;
Expliquer pourquoi ces deux élèves ont raison, chacun avec son argument.

Activité 2

On considère les situations ci-contre, présentant deux sportifs.

Comment expliquer que, l'individu de la situation A ne travaille pas ? Et que pour l'individu de la situation B, ce n'est pas lui qui travaille, mais plutôt l'objet qu'il tend à soulever ?



Situation A



Situation B

Objectifs

- ⇒ Définir : travail d'une force
- ⇒ Exprimer et calculer le travail du poids
- ⇒ Définir et calculer la puissance d'une force

1. Définition du travail d'une force et unité

- Le travail d'une force fait intervenir deux grandeurs : la **force $\vec{F}$** et le **déplacement $\overrightarrow{AB}$** .
- En physique, on dit d'une force qu'elle travaille, lorsqu'elle est capable de déplacer son point d'application (**son point d'appui**).
- Les définitions ci-dessous sont valables

1.1. Définition

- Le **travail** d'une force, est le produit scalaire des vecteurs force et déplacement.
- Le **travail**, est la grandeur, l'action d'une force qui déplace son point d'application.

D'après la première définition, on voit directement que le travail d'une force est une grandeur algébrique, i.e. qu'il possède un signe.



1.2. Symbole et unité du travail d'une force

- Le travail (**Work** en anglais) d'une force $\vec{F}$ est noté $W(\vec{F})$ et est obtenu par la relation :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(\widehat{\vec{F}; \overrightarrow{AB}}) \quad (4.1)$$

- L'unité du travail est le **Joule** de symbole **J** : c'est donc de l'**énergie** ; la force en Newton (**N**) et le déplacement en mètres (**m**).

Remarque

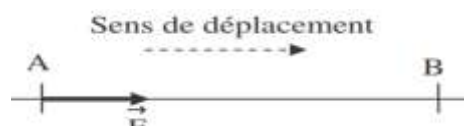
Le Joule est le travail d'une force de 1 Newton dont le point d'application se déplace de 1 m dans sa propre direction.

Conséquences de la formule (4.1)

Posons $\alpha = (\widehat{\vec{F}; \overrightarrow{AB}})$

- Si $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (**angle aiguë**), alors, le travail est dit **moteur** ou **positif**. (figure 4.1)

Si la force et le déplacement sont dans le même sens, le travail est moteur.



- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (**angle droit**), le travail est **nul**. Cela signifie que si la force est perpendiculaire au déplacement, alors son travail est nul. (figure 4.2)

- Si $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ (**angle obtus**), le travail est dit **résistant** ou **négatif**. (figure 4.3)

Si la force et le déplacement sont en sens contraires, le travail est dit résistant.

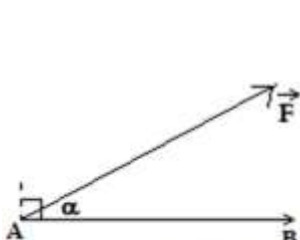
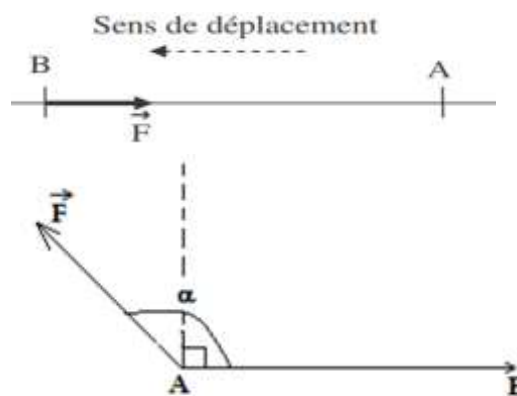


Figure 4.1 : Travail moteur

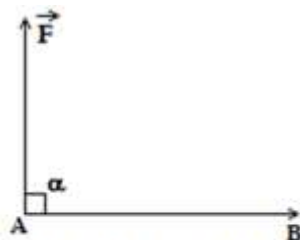


Figure 4.2 : Travail nul

Figure 4.3 : Travail résistant

Exemple

Calculer le travail d'une force de 10 N se déplaçant le long d'une portion rectiligne $AB = 10$ m dans les cas où : $\alpha = \{30^\circ; 60^\circ; 120^\circ\}$.

Solution

Données : $F = 10$ N ; $AB = 10$ m ; $\alpha = \{30^\circ; 60^\circ; 120^\circ\}$

On sait par définition que : $W_{AB}(\vec{F}) = F \times AB \times \cos \alpha$

- Pour $\alpha = 30^\circ$, $W(\vec{F}) = 86,60$ J.
- Pour $\alpha = 60^\circ$, $W(\vec{F}) = 50$ J.
- Pour $\alpha = 120^\circ$, $W(\vec{F}) = -50$ J.

1.3. Travail d'une force en translation

- Une force est dite en translation, lorsque son point d'application se déplace le long d'une portion rectiligne.

- Une force peut donc être :
 - Soit sur un plan horizontal ou vertical (figure 4.4)

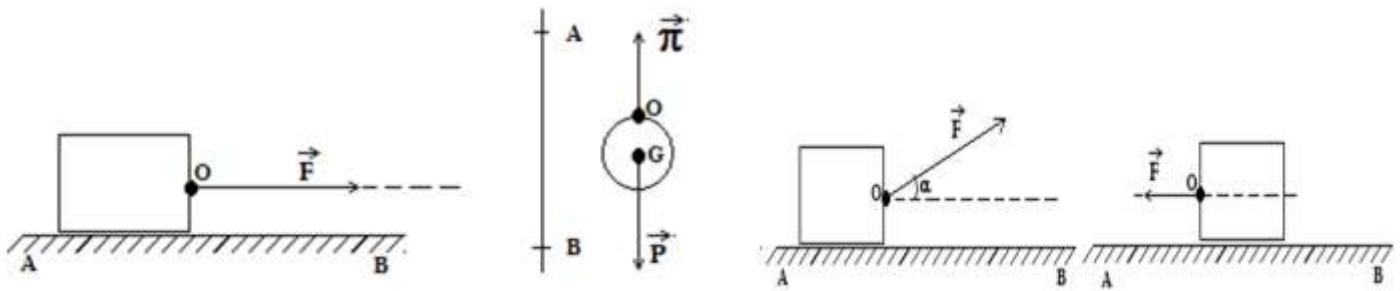


Figure 4.4 : Forces sur une trajectoire rectiligne

- Soit sur un plan incliné (figure 4.5)

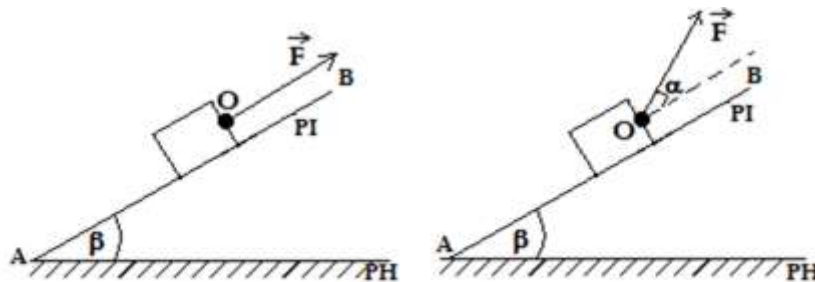


Figure 4.5 : Force sur un plan incliné

Remarque

- ✍ Un plan est dit **incliné**, lorsqu'il forme un angle avec l'horizontal.
- ✍ Toute force qui s'oppose au déplacement, est dite **force de résistance** ou **force de frottement** et est généralement notée $\vec{f}$ ou $\vec{\pi}$ (résistance de l'air ou poussée d'Archimède de l'air), $\vec{R}$ (résistance d'un support)...
- ✍ Toute force de frottement a un travail négatif ou résistant : **$W(\text{force de résistance}) < 0$** .
- ✍ Lorsqu'une force est inclinée par rapport à l'horizontal, il est nécessaire de faire les projections de celle-ci suivant les axes d'un repère **cartésien** ($\vec{i}$; $\vec{j}$) ou de **Frenet** ($\vec{t}$; $\vec{n}$).

Exemple

Donnons les expressions des forces qui s'appliquent sur le solide ci-dessous :

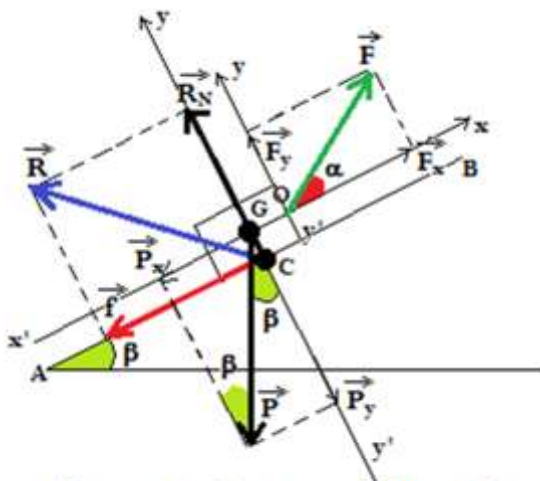


Figure 4.6 : Figure expérimentale

- Système : solide (S) de masse m.
- Référentiel : de laboratoire ou terrestre.
- Bilan des forces appliquées à (S)
 - $\vec{F}$: force de traction ou force motrice, en O
 - $\vec{P}$: poids du solide (S), en G
 - $\vec{R}$: réaction du plan incliné, en C.

En présence des forces de frottement, **$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$ (4.2)**

Avec $\begin{cases} \vec{f} : \text{force de frottement} \\ \vec{R}_N : \text{réaction normale au plan incliné (PI)} \end{cases}$



Selon la figure 4.6 ci-dessus, les trois forces du bilan sont toutes inclinées. Nous allons donc passer aux projections dans le repère cartésien (G ; x ; y). Orientations : x'x ; y'y

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \text{ avec } \begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \sin \alpha \end{cases} ; \\ \Rightarrow W(\vec{F}) = W(\vec{F}_x) + W(\vec{F}_y) = \vec{F}_x \cdot \vec{AB} = (F \cos \alpha) \cos(\underbrace{\vec{F}_x; \vec{AB}}_0) = F \times AB \times \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y \text{ avec } \begin{cases} P_x = P \sin \beta = mg \sin \beta \\ P_y = P \cos \beta = mg \cos \beta \end{cases} \\ \Rightarrow W(\vec{P}) = W(\vec{P}_x) + W(\vec{P}_y) = \vec{P}_x \cdot \vec{AB} = (P \sin \beta) \cos(\underbrace{\vec{P}_x; \vec{AB}}_\pi) = -m \times g \times AB \times \sin \beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y \text{ avec } \begin{cases} R_x = f \\ R_y = R_N \end{cases} \\ \Rightarrow W(\vec{R}) = W(\vec{f}) + W(\vec{R}_N) = \vec{f} \cdot \vec{AB} = (f \times AB) \cos(\underbrace{\vec{f}; \vec{AB}}_\pi) = -f \times AB \end{aligned} \quad (4.5)$$

Remarque

✍ Un **système** en physique est tout objet sur lequel porte une étude physique.

$$\text{✍ En présence des forces de frottement, } W(\vec{R}) = W(\vec{f}) \quad (4.6)$$

$$\text{✍ En absence des frottements, } W(\vec{R}) = W(\vec{R}_N) = 0 \quad (4.7)$$

✍ Le travail d'une force ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point de départ et du point d'arrivée.

Pour démontrer cette dernière remarque, considérons le déplacement suivant :

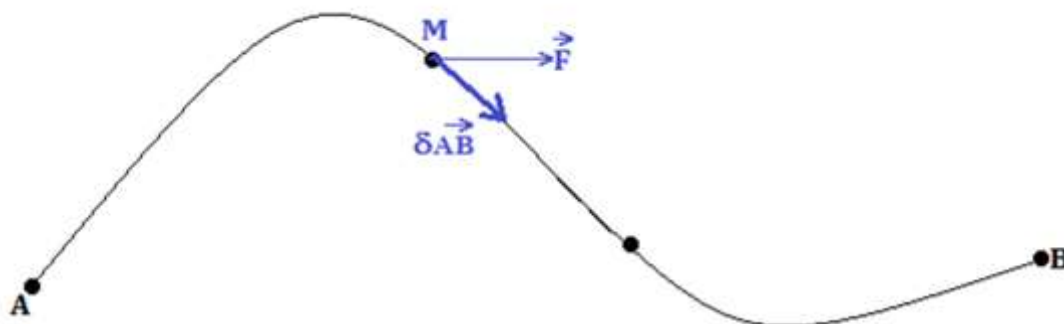


Figure 4.7 : Déplacement quelconque d'une force constante $\vec{F}$

Pour cela, nous supposons la force $\vec{F}$ constante.

Décomposons le trajet **AB** en portion : **Aa₁, a₁a₂, ..., a_nB**, assez petite pour qu'elle puisse être considérée comme rectiligne. Le travail de $\vec{F}$ pour le déplacement AA' est la somme des **travaux élémentaires** $\delta W_{AB}(\vec{F})$ pour chacun des petits déplacements. On aura donc :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \delta W_{Aa_1}(\vec{F}) + \delta W_{a_1a_2}(\vec{F}) + \dots + \delta W_{a_nB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{Aa_1} + \vec{F} \cdot \vec{a_1a_2} + \dots + \vec{F} \cdot \vec{a_nB} = \vec{F} \cdot (\vec{Aa_1} + \vec{a_1a_2} + \dots + \vec{a_nB})$$

$$W_{AA'}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

1.4. Travail d'une force en rotation

Considérons un solide (S) mobile autour d'un axe fixe (Δ) perpendiculaire en O au plan de la figure 4.8.

Lors de la rotation, le point d'application de la force $\vec{F}$, constante, appliquée au solide, décrit un cercle de rayon OA situé dans le plan de la figure.

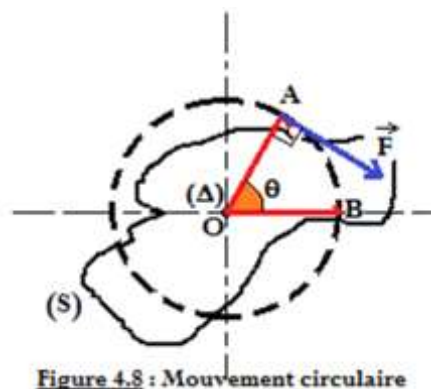


Figure 4.8 : Mouvement circulaire

Par définition, le travail d'une force constante est donné :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\ell}_{AB} \quad (4.8)$$

Or, la longueur de l'arc fermé est donnée par :

$$\ell_{AB} = R \times \theta = OA \times \theta \quad \begin{cases} \theta \text{ en radians (rad)} \\ R \text{ en mètres (m)} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = \underbrace{F \cdot OA}_{M_{\Delta}(\vec{F})} \cdot \theta \quad (4.10)$$

En posant,

$$\mathcal{M}_{\Delta} = F \times OA \text{ (N.m)} \quad (4.11)$$

le moment de la force $\vec{F}$, l'équation (4.10) devient alors,

$$W_{AB}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{\Delta} \cdot \theta \quad (4.12)$$

Remarque

Le moment d'une force est une valeur algébrique, car dépend du sens de rotation du système.

Pour un couple de forces, le travail est donné par :

$$W_D(C) = F \times D \times \theta = \mathcal{M}_{\Delta}(C) \times \theta \quad (4.13)$$

Avec C, couple de forces ; F, force équivalente ; D, diamètre = 2R.

Si n est le nombre de tours effectués, alors, l'angle $\theta = 2\pi n$. (4.14)

$2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 400 \text{ grades} = 1 \text{ tr}$ (4.15)

Exemple

Une planche OA de masse 14 kg et de longueur 5 m, repose sur un sol horizontal. On exerce en 3 s sur l'extrémité A, une force $\vec{F}$ perpendiculaire à OA et la planche tourne autour de l'extrémité O d'un angle α (voir schéma ci-dessous). G est le centre de gravité de la planche et on a : OG = GA.

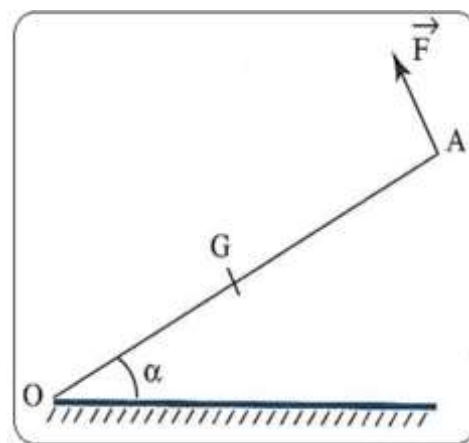
1. Exprimer en fonction de α :

1.1. L'intensité de la force $\vec{F}$;

1.2. La variation d'altitude du point G ;

1.3. Le travail et la puissance de $\vec{F}$ et du poids $\vec{P}$ de la planche.

2. Faire l'application numérique dans le cas où $\alpha = 30^\circ$.



Solution

(1) Donnons, en fonction de α

1.1. L'intensité de la force F.

Selon la figure ci-dessus, les forces F et P_y forment un couple de forces. Donc, elles ont un moment égal.

On a : $M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{P}_y) \Rightarrow F \cdot AO = P_y \cdot OG$

Soit $F \cdot AO = m \cdot g \cdot OG \cdot \cos \alpha$ or $OG = 1/2 OA$



$$\Rightarrow F = \frac{1}{2} mg \cos \alpha = 68,6 \times \cos \alpha$$

1.2. La variation d'altitude h du point G.

Selon la figure, $h = OG \times \sin \alpha = 2,5 \times \sin \alpha$

1.3. Travail et puissance de :

♦ De la force F

$$- W(\vec{F}) = M_o(\vec{F})\theta = 2\pi F \cdot AO = 2154,04 \times n \times \cos \alpha$$

$$- P = \frac{W(\vec{F})}{t} = 718,01 \times n \times \cos \alpha$$

♦ Du poids P

$$- W(\vec{P}) = W(\vec{P}_y) = -mgh = -343 \times \sin \alpha$$

$$- P = \frac{W(\vec{P})}{t} = 114,33 \times \sin \alpha$$



(2) Faire l'application pour : $\alpha = 30^\circ$; $n = \frac{1}{4}$ tour.

1.5. Travail du poids d'un corps

Le travail du poids d'un corps se calcul en fonction du déplacement du **centre de gravité** dudit corps. Supposons que le centre de masse du corps s'est déplacé d'un point A vers un point B. Selon la formule (1), le travail sera : $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB}$ (4.16)

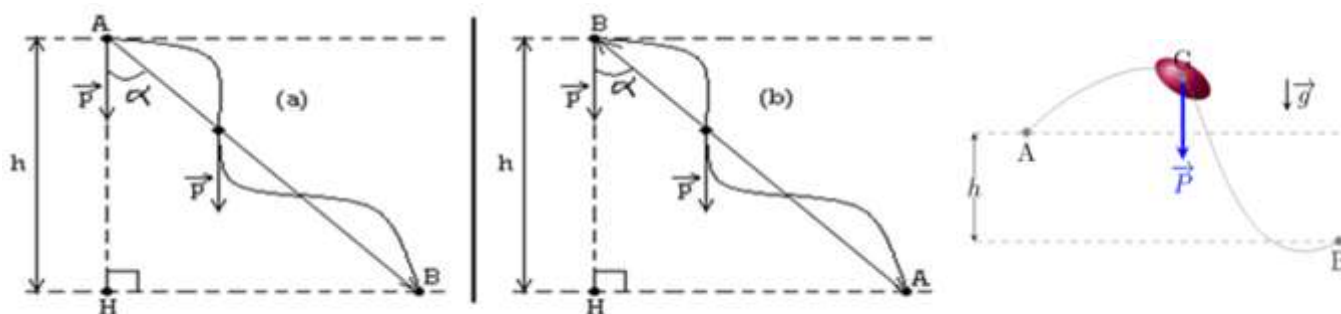


Figure 4.9 : Trajets du poids d'un corps.

- Selon la figure 4.9 (a), $W_{AB}(\vec{P}) = P \cdot h$ (4.17) car $\cos \alpha > 0$. Le travail du poids dans ce cas est dit **moteur**.
- Selon la figure 4.9 (b), $W_{AB}(\vec{P}) = -P \cdot h$ (4.18) car $\cos \alpha < 0$ pour $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Le travail est dit **résistant**.

Démonstration du pourquoi h et non $AB \cos \alpha$:

Par définition : $W_{AB}(\vec{P}) = P \times AB \times \cos \alpha$. Or dans le triangle AHB de la figure 4.9 (a), $\cos \alpha = \frac{h}{AB}$

$$\Rightarrow h = AB \times \cos \alpha$$

D'où, $W_{AB}(\vec{P}) = P \times h$ (La présence du signe moins sera démontré plus bas).

Remarque

Le vecteur poids dans ces cas de figure est incliné par rapport au déplacement. Il est donc important de penser aux projections sur les axes, pour pouvoir expliciter le travail du poids le long du trajet AB.

Conclusion

C11 : Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais de la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée.

C12 : Pour parler du travail du poids, il faudrait que le centre de gravité du solide se déplace verticalement.

Exemple

Quel travail est nécessaire pour ériger 3 pierres cubiques d'arrête $a = 40\text{cm}$ initialement placées sur le sol sous forme d'une colonne ? Même question pour 20 pierres. On donne la masse volumique d'une pierre : $\rho = 2400\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Solution

Il suffit de calculer le travail W du poids de l'ensemble formé par :

- 3 pierres de masse volumique $\rho = 2400\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et d'arrête $a = 40\text{ cm} = 0,4\text{ m}$ chacune.

$$W = Mgh \text{ or } h = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a = a \text{ et } m = \rho V = \rho a^3$$

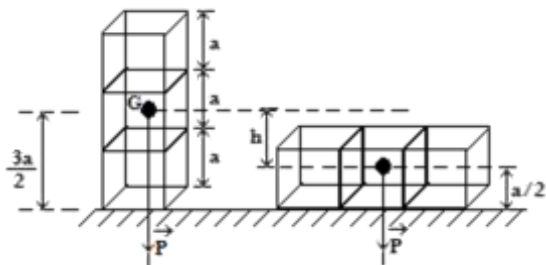
$$\Rightarrow M = 3m = 3\rho a^3$$

$$\Rightarrow W = 3\rho g a^4 = 1806,336\text{ J}$$

- 20 pierres. Dans ce cas, $h = \frac{20}{2}a - \frac{1}{2}a = \frac{19}{2}a$ et

$$M = 20\rho a^3.$$

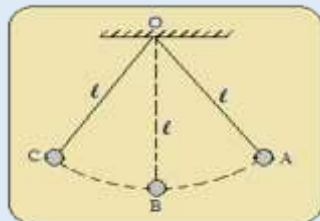
$$\Rightarrow W = 190 \times \rho \times g \times a^4 = 114401,28\text{ J}.$$



Exemple

Un pendule est constitué d'une petite bille de masse $m = 200\text{g}$ fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur $l = 80\text{cm}$. Le pendule oscille dans le plan vertical avec une amplitude de $\alpha = 30^\circ$. Calculer le travail du pendule, lorsque la boule passe :

- Du point A au point B ;
- Du point B au point C ;
- Du point A au point C.



SOLUTION

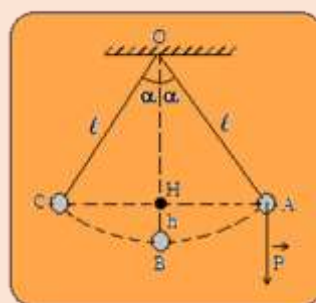
D'après la formule (2), on a : $W_{\text{déplacement}}(\vec{P}) = \pm P \cdot h$

D'après la figure ci-contre, $h = OH = l(1 - \cos\alpha)$

1. Partant donc du point A au point B, le solide descend, par conséquent, le travail du poids est moteur. On aura, alors : $W(\vec{P}) = m \times g \times l \times (1 - \cos\alpha) = 0,21\text{ J}$.

2. Partant du point B au point C, le solide monte, le travail du poids est par conséquent résistant. On aura alors : $W(\vec{P}) = -m \times g \times l \times (1 - \cos\alpha) = -0,21\text{ J}$.

2. Partant du point A au point C, il suffit d'additionner les travaux entre A et B puis entre B et C. On aura donc, $W_{AC}(\vec{P}) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{P}) = 0,21 + (-0,21) = 0\text{ J}$.



$$OB = OH + HB$$

$$\Rightarrow HB = OB - OH$$

$$\text{or } \cos\alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{OC} = \frac{OH}{l}$$

$$\Rightarrow OH = l \cdot \cos\alpha$$

$$OH = l(1 - \cos\alpha)$$

2. Notion de puissance d'une force

- La puissance d'une force fait intervenir le **travail W** et le **temps t** ou **Δt**
- La puissance **P** , est la grandeur qui relie le travail et la vitesse d'exécution.
- Plus l'exécution d'un travail est rapide, plus la puissance mise en jeu est grande.

2.1. La puissance moyenne P_m .

- La puissance moyenne **P_m** d'une force est le quotient du travail (**W**) effectué par la force par le temps (**t**) mis pour l'effectuer :



$$P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{W}{t} \quad \text{en } \textcolor{red}{watts} (W) \quad (4.17)$$

- Un **watt** est la puissance d'une force qui effectue un travail de un joule en une seconde.
- On emploie encore dans l'industrie, le **cheval** (ch) : $1 \text{ ch} \approx 3/4 \text{ kW}$.

2.2. La puissance instantanée P_i

2.2.1. Puissance d'un solide en translation

Soit $\vec{F}$ une force appliquée en un point A du solide. Si $\vec{v}$ est la vitesse du point A à un instant donné, la puissance de $\vec{F}$ à cet instant est par définition :

$$P_i = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \times v \times \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F \text{ en } (N) \\ v \text{ en } (m.s^{-1}) \\ P_i \text{ en } (W) \end{cases} \quad (4.18)$$

Remarque :

Si la force $\vec{F}$, constante, est appliquée en un point d'un solide en mouvement rectiligne uniforme (i.e. à **vitesse constante**), la puissance de la force est constante et est égale à la puissance moyenne.

En effet, $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{AB}}{t} = \frac{W}{t}$

2.2.2. Puissance d'un solide en rotation

Soit une force $\vec{F}$, de moment $M_\Delta(\vec{F})$, appliquée en un point A d'un solide mobile autour d'un axe (Δ). Si ω (oméga) est la vitesse angulaire du solide à l'instant t, la puissance de $\vec{F}$ à cet instant sera :

$$P = M_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M_\Delta(\vec{F}) \text{ en } (N.m) \\ \omega \text{ en } (rad.s^{-1}) \\ P \text{ en } (W) \end{cases} \quad (4.19)$$

Remarque

$$\begin{cases} \theta = \omega \times t \\ n = N \times t \text{ avec } N \text{ nombre de tours par seconde (tr.s}^{-1}\text{)} ; n \text{ nombre de tours (tr).} \\ \omega = 2\pi N \end{cases} \quad (4.20)$$

Si le moment de la force $\vec{F}$ est constante et si le mouvement du solide est en rotation uniforme, la puissance de la force est constante et égale à la puissance moyenne.

En effet, $P = M_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega = M_\Delta(\vec{F}) \cdot \frac{\theta}{t} = \frac{W}{t}$

3. Jeu bilingue

Expression française	Expression anglaise
Travail	Work
Force	Force
Puissance instantanée	Instantaneous power
Puissance moyenne	Average power
Vitesse de rotation	Rotation speed

Sentence :

Le travail d'une force constante, est le produit scalaire du vecteur force et du vecteur déplacement.

Translation

The work of a constant force, is the scalar product of the force vector and the displacement vector.