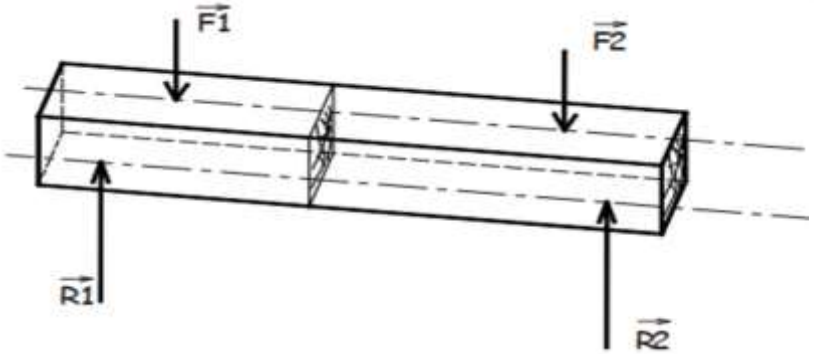
MODULE ⇒ MESURES ET INCERTITUDES I

Leçon 3

CONTRAINTES D'UNE LOI

ACTIVITÉ



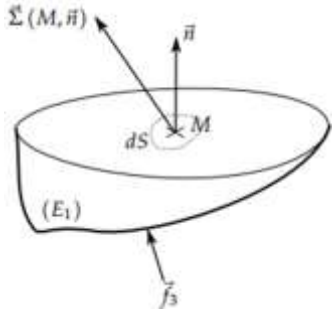


Figure 3.1 : Figure d'activité

Considérons un solide en équilibre sous l'action des forces extérieures ; si ce système est en équilibre, le système des forces est équivalent à zéro (somme vectorielle des forces est un vecteur nul).

Si on coupe ce solide en deux parties, que se passe-t-il au niveau de la coupure sur chaque petit élément de surface que nous appellerons ***ds*** ?

Objectifs

- Définir : contrainte d'une loi physique.
- Évaluer la contrainte due à l'élasticité, la contrainte de la loi d'Ohm et la contrainte des gaz parfaits.

1. Définition et symbole

1.1. Définition

- Du point de vue physique, les **contraintes** peuvent être vues comme des **efforts internes infinitésimaux**.
- Ce sont des efforts de cohésion qui vont s'opposer aux **déformations** du solide pour garder sa cohésion et son intégrité.
- Il est possible de déterminer ces efforts de cohésion en réalisant une coupe fictive du solide étudié.

1.2. Symbole normalisé

On considère une barre de section constante S, faite dans un matériau parfaitement uniforme et isotrope(1). La barre est attachée à un bout ; on applique au bout libre, une force $\vec{F}$ comme le montre la figure ci-contre.

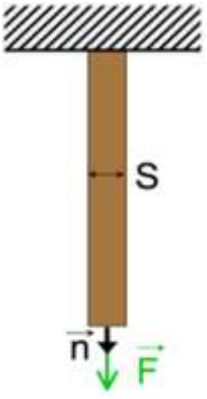


Figure 3.2

Le rapport $\frac{\|\overrightarrow{force}\|}{Surface} = \frac{F}{S}$ représente les efforts extérieurs : c'est la **pression**.

On a alors : $$P = \frac{F}{S} = \sigma \qquad (3.1)$$

Dans cette formule,

- La force $\vec{F}$, s'exprime en Newtons de symbole **N** ;
- La surface ***S***, s'exprime en mètre carré de symbole **m²** ;
- La pression ***P*** s'exprime en Pascal de symbole **Pa** ;
- Les efforts ou contraintes extérieures **σ** s'expriment en Pascal : **σ = P**.

Remarque

Dans cet exemple, la contrainte a la dimension de la pression et est appelée **contrainte normale**.

D'après la figure 3.2, la force $\vec{F}$ et la normale $\vec{n}$ à la surface sont portées par le même axe : elles sont donc **colinéaires**. On peut alors assister aux situations suivantes :

- Une **extension** (**traction, tension**) uniaxiale(2) : $\vec{F} \cdot \vec{n} \succ 0$ (**3.2**)
- Une **compression** uniaxiale : $\vec{F} \cdot \vec{n} \prec 0$. (**3.3**)

Exemple

Un tabouret de masse m = 2,5 kg repose sur le sol par quatre pieds de 6 cm² de section chacun. Quelle est la pression exercée sur le sol lorsqu'une personne de 57,5 kg monte sur ce tabouret ? Prendre g = 10 N.kg^{-1}.

Solution

Données : $m_1 = 2{,}5$ kg ; $m_2 = 57{,}5$ kg ; $M = m_1 + m_2 = 60$ kg ; $S = 4\times6$ cm^2 $= 24.10^{-4}$ m^2.

Par définition, $\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{M \times g}{S} = 25\times10^4\, Pa$

2. Contraintes des lois physiques

Pour cette partie, nous avons choisi trois lois physiques :

- Loi de compression et de détente (loi d'élasticité ⇒ loi de Hooke)
- Loi d'Ohm
- Loi des gaz parfaits.

2.1. Contrainte élastique (loi de Hooke)

- Lorsqu'un corps est soumis à des forces extérieures, il y a un changement de sa forme ou de ses dimensions. Ce changement s'appelle **déformation**.
- La **déformation** est la modification que subit un corps sous l'effet de la force qu'il subit
- La déformation est plus ou moins grande dépendamment de la grandeur des forces et des matériaux qui sont en cause. On peut alors assister soit à un **étirement** soit à une **compression** du corps comme le montrent les figures 3.3 ci-dessous.

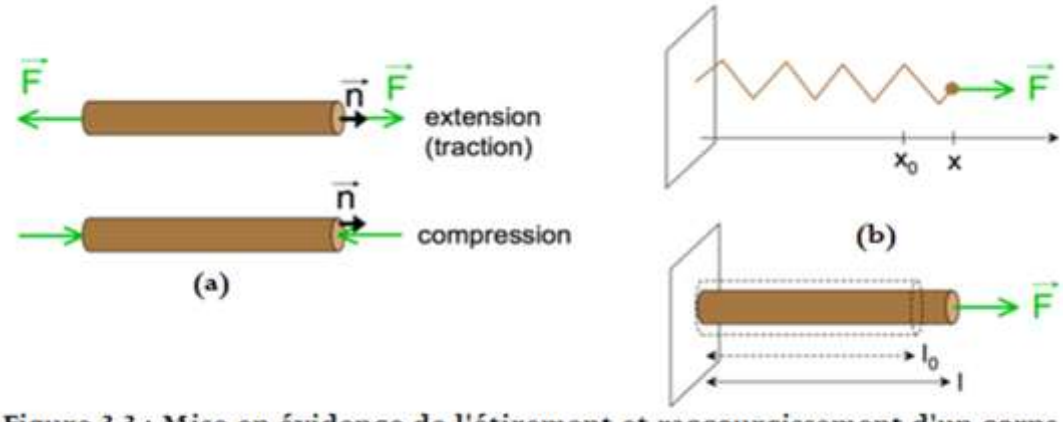


Figure 3.3 : Mise en évidence de l'étirement et raccourcissement d'un corps

- Comportement élastique linéaire
  - **Ressort** : $F_{ext} = k(x - x_0) = k\Delta x$ (**3.4**)

- L'allongement du ressort (fig. 3.3. (b.1)) par rapport à sa longueur d'équilibre est :

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{(en m)} \tag{3.5}$$

- k (en N.m^{-1}) = constate de raideur du ressort. Elle dépend du matériau dont est fait le ressort. Si le matériau est dur, k est élevé, il faut alors une force plus grande pour obtenir le même allongement.
  k dépend aussi des paramètres géométriques du ressort : longueur à vide x_0 et section S

$$\begin{cases} k \propto x_0^{-1} \\ k \propto S \end{cases} \tag{3.6}$$

Remarque

Pour démontrer la première relation de (3.6), il suffit de placer plusieurs ressorts identiques en série et la seconde en plaçant ces ressorts en parallèle.

- Par analogie : barre sous traction : $\sigma = E \times \varepsilon$ (3.7)
- La **déformation longitudinale** (δ) : C'est l'allongement ou le raccourcissement que subit une pièce sous l'effet d'un effort de traction ou de compression :

$$\delta = \ell - \ell_0 \quad \text{(en m)} \tag{3.8}$$

- La **déformation unitaire** (ε) : C'est la déformation par unité de longueur. Elle est sans unité.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\ell_0} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \tag{3.9}$$

- Le module de Young (élasticité) (E) : C'est la constante de proportionnalité entre la contrainte qu'un matériau subit et sa déformation unitaire. C'est une constante propre à chaque matériau :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} > 0 \tag{3.10}$$

Remarque

- **Loi de HOOKE** : « Lorsqu'on charge un matériau, si la contrainte produite demeure inférieure à sa limite élastique, sa déformation est proportionnelle à la déformation qu'il subit : $\sigma = E \times \varepsilon$ »
- Dans le domaine du linéaire, $\varepsilon \ll 1$.
- Pour un allongement radial, $\delta_R = R - R_0$ (m) (3.11)
- La déformation unitaire radiale est : $\varepsilon_R = \frac{\delta_R}{R_0}$ (3.12)
- Le coefficient de poisson (ν) est : (à voir plus loin) $\nu = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_R}$ (3.13)

C'est le rapport entre les déformations unitaires transversale ε_L et axiale ε_R, quand la déformation a lieu dans les limites d'élasticité.

- La loi de Hooke en cisaillement est telle que : $\tau = G \times \gamma$ (3.14)
- La grandeur G est appelée **module de rigidité** et s'exprime en pascal : $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau}{\varepsilon_s}$ (3.15)
- La grandeur τ est la **contrainte en cisaillement** : $\tau = \frac{V}{A}$ (V = F en Newton) (3.16)
- La grandeur ε_s est la déformation unitaire : $\varepsilon_s = \frac{\delta_s}{L}$ (3.17)
- L'angle de déformation γ ou déformation angulaire (en radians) est : $tg\gamma \approx \gamma = \varepsilon_s = \frac{\delta_s}{L}$ (3.18)
- La relation entre le module de rigidité G, le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson est donnée par :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (3.19)$$

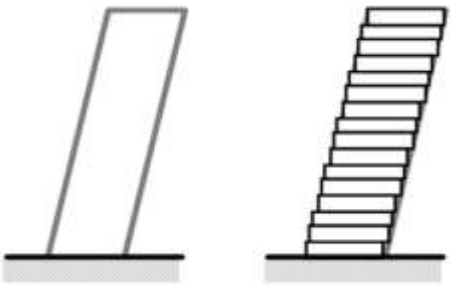


Figure 3.4

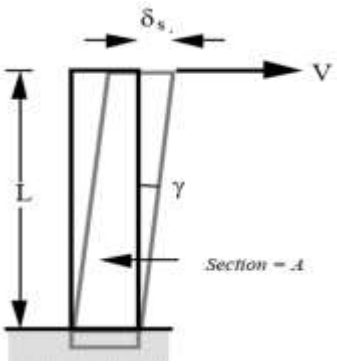


Figure 3.5

Exemples

Ex.1 : Une barre d'acier (module d'élasticité E = 200 GPa) de 3 m de longueur et de section carrée ayant 12,5 mm de côté, est sollicitée par une tension de 21360 N. Quel est son allongement total ?

Solution

Données :

$L_0 = 3$ m ; $S = 12{,}5$ mm × 12,5 mm = $1{,}56.10^{-4}$ m² ; E = 200 GPa = 2.10^5 MPa ; F = 21360 N; δ = ?

- On sait que : $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{21360}{1{,}56.10^{-4}} = 136923076\,9Pa = 136{,}9.MPa$
- On sait que : $\sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{136{,}9}{2.10^5} = 68{,}45.10^{-5}$
- On a alors : $\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \Rightarrow \delta = \varepsilon \times L_0 = 205{,}35.10^{-5}\,m = 2{,}0535mm$

Ex.2 : Calculer la déformation angulaire d'une tige d'aluminium de 5 m de long et de 1 cm² de section qui est soumise à un effort transversal de 100 kN.

Solution

Données : $L_0 = 5$ m ; S = 1 cm² = 10^{-4} m² ; F = 100 kN = 10^5 N ; γ = ?

- On sait que : $\tau = \frac{F}{S} = \frac{10^5}{10^{-4}} = 10^9\,Pa = 1.GPa$
- On a alors : $\tau = G \times \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{27} = 0{,}037rad$

- On regroupe les propriétés des matériaux couramment utilisés en construction dans le tableau suivant :

Matériau	Masse volumique ρ	Limite élastique σ_e	Cont. ultime σ_u	Module élasticité E	Module rigidité G	Coef. de Poisson υ	Coef.dila. thermique α
	[kg/m³]	[M Pa]	[M Pa]	[G Pa]	[G Pa]		10^{-6} [°C^{-1}]
Acier	7,85	300,0	550,0	200,0	80,0	0,25	12,0
Aluminium	2,7	300,0	400,0	72,0	27,0	0,33	24,0
Béton	2,4	-	30,0	25,0	11,0	0,15	11,3
Bois (fib.)	0,55	-	40,0	10,0	-	-	5,4
Cuivre	8,9	50,0	150,0	120,0	45,0	0,33	16,6
Laiton	8,5	200,0	350,0	100,0	37,0	0,35	18,9

Tableau 3.1 : Propriétés des matériaux couramment utilisé en construction

2.2. Contrainte sur la loi d'Ohm

- Comme nous l'avons énoncé à la leçon précédente, la loi d'Ohm est cette loi qui met en relation,
  - La tension électrique **U** (en volts), qui joue le rôle de tension **T** d'un ressort (T = kx) en mécanique et qui se mesure à l'aide d'un **voltmètre**.
  - Le courant électrique **I** (en Ampères), qui joue le rôle de vitesse (linéaire $\dot{x}$ ou angulaire $\dot{\theta}$) en mécanique et qui se mesure à l'aide d'un **ampèremètre**.
  - La résistance **R** (en Ohms), qui joue le rôle de coefficient de frottement b ($\vec{f} = -\underline{b} \times \vec{V}$) en mécanique et qui se mesure à l'aide d'un **ohmmètre**. Voir figure 3.6.

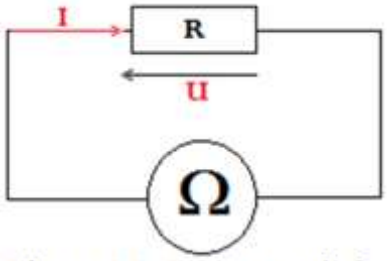


Figure 3.6 : Mesurage de la résistance R

- La loi d'Ohm s'écrit alors : $U = R \times I \Rightarrow R = \frac{U}{I}$ **(3.20)**

  Dans cette relation,
  - Lorsqu'on ajoute un résistor en série dans un circuit, l'**intensité** du courant **diminue**.
  - Plus la résistance est grande, plus l'intensité électrique est petite.
  - Tout conducteur présente une **résistance au passage du courant électrique** ce qui provoque son **échauffement** : c'est l'**effet Joule**.
- On constate alors que, la résistance joue le rôle d'effort extérieur : c'est la **contrainte σ** de la loi d'Ohm. On a alors :

$$\sigma_{\Omega} = \frac{U}{I} = R \quad (\text{en } \Omega) \qquad \textbf{(3.21)}$$

Remarque

Dans le tracé de la caractéristique U = f(I), σ_{Ω} représente la pente de la droite obtenue et son inverse, la **conductance G qui s'exprime en siemens** (**S = Ω^{-1}**).

2.3. Contrainte sur la loi des gaz parfaits

Dans cette partie, nous allons juste utiliser les relations déjà vues, afin de ressortir la contrainte des gaz parfaits.

Nous avons vu en (2.34) que : **P × V = n × R × T** où P est la pression (en Pa), V le volume (en m^3), n le nombre de moles (en mol), R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1} la constante des gaz parfaits et T (en K) la température.

Selon (3.1), $P = \frac{F}{S} = \sigma$ on a alors, $\begin{cases} PV = nRT \\ P = \sigma_{GP} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{GP} = \frac{F}{S} = \frac{n \times R \times T}{V} = \frac{m \times R \times T}{M \times V}$ **(3.22)**

3. Jeu bilingue

Expression française	Expression anglaise
Contrainte	Stress
Déformation	Strain
Module de Young	Young modulus
Rigidité	Rigidity, stiffness
Cisaillement	Shear

Sentence: HOOKE's law: "When loading a material, if the stress produced remains below its elastic limit, its deformation is proportional to the deformation it undergoes: **σ = E×ε**".

(1) Isotrope : Ensemble des corps ayant les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions.
(2) Uniaxiale : Même axe ; un seul axe.