MODULE ⇒ MESURES ET INCERTITUDES 1

Leçon 2

INCERTITUDE SUR LA MESURE

ACTIVITÉ

Voilà deux enfants A et B qui se disputent sur la l'écriture de la valeur de la célérité C de la lumière dans le vide.

- L'enfant A dit : la valeur de C est connue de tous les scientifiques comme étant une constante de valeur arrondie égale à 3.10^8 m.s^{-1}
- L'enfant B dit : certes, mais en réalité, cette valeur arrondie vaut $(3{,}00278 \pm 0{,}04) .10^8$ m.s^{-1}.

1. Des deux enfants, lequel apporte plus de précision sur la valeur de C ? Why ?

2. Quel est l'intervalle de la valeur de C ?

Objectifs

- Définir : incertitude ; incertitude absolue ; incertitude relative ; incertitude type ; incertitude élargie ; intervalle de confiance.
- Déterminer l'intervalle de confiance d'une loi physique : la loi d'Ohm, la loi des gaz parfaits.

Introduction

Mesurer une grandeur n'est pas seulement la recherche de la valeur numérique de cette grandeur, mais aussi de lui associer une **incertitude** dans le but de **qualifier la qualité de la mesure**. Notons toutefois que cette incertitude est associée aux **erreurs** (1) de mesure pouvant être d'origine instrumental ou de l'expérimentateur ou encore de la variabilité de la grandeur à mesurer.

Dans un laboratoire, on peut distinguer deux grandeurs physiques :

- Les **grandeurs calculées** : Ce sont les résultats d'un calcul découlant d'une loi ou d'une formule et qui font intervenir des grandeurs mesurées
- Les **grandeurs mesurées** : Ce sont les résultats d'une mesure effectuée par l'expérimentateur à l'aide d'un appareil de mesure.

Définition générale

L'**incertitude de mesure** est la valeur qui caractérise la dispersion des valeurs pouvant être attribuées à la grandeur mesurée.

1. Incertitudes absolue et relative

1.1. Incertitude absolue

Pour mieux aborder cette notion, acceptons de prendre comme exemple, l'exercice suivant.

Depuis les classes de quatrième, on nous a appris que l'intensité du champ de pesanteur $\vec{g}$ dépend du lieu, ce qui entraine aussi la dépendance du poids $\vec{P}$ d'un objet de masse m (kg).

À partir des expériences faites, $g_p = 9{,}83$ N.kg^{-1} au pôle Nord et $g_{éq} = 9{,}78$ N.gk^{-1} au niveau de l'équateur. Supposons un objet de masse 15 kg à ces deux endroits. On aura alors :

- $P_p = m \times g_p = 147{,}45$ N
- $P_{éq} = m \times g_{éq} = 146{,}7$ N

Notons ΔP la variation du poids telle que :

- $\Delta P = P_p - P_{éq}$, si l'objet est d'abord à l'équateur puis au pôle nord

- ou $\Delta P = P_{éq} - P_p$, dans le cas contraire.

On aura alors : $\Delta P = \pm 0{,}8$ N (ce résultat est en accord avec les lois d'écriture des CS de la leçon 1).
On pourra alors écrire : $-\Delta P \leqslant P \leqslant +\Delta P \Rightarrow P = 147{,}1 \pm 0{,}8$ (N) (En tenant compte des arrondis des valeurs de P calculées plus haut).
La grandeur ΔP est appelée **incertitude absolue** de la mesure et a la même unité que la valeur mesurée.

Définition

On appelle **incertitude absolue** d'une grandeur **x**, la grandeur notée **Δx**, qui représente la moitié de l'intervalle à l'intérieur duquel on est certain que se trouve la valeur exacte de la mesure.

Remarque

✍ Δx est la somme de l'incertitude humaine (Δx_H) et de l'incertitude de l'instrument (Δx_I) :

$$\Delta x = \Delta x_H + \Delta x_I \qquad (2.1)$$

On prend généralement, pour l'incertitude de l'instrument, la sensibilité de l'appareil de mesure utilisé. L'incertitude humaine, doit quant à elle être exprimée.

✍ Les calculs sur les incertitudes ont été vus en seconde, nous verrons cela ici qu'en exercices.

1.2. Incertitude relative

La qualité d'une mesure s'exprime par le rapport entre son incertitude absolue **Δx** et la mesure **x** elle-même. Ce rapport est appelé **incertitude relative** que nous allons noter I_R.

Définition

On appelle incertitude relative (**ou précision**) d'une mesure, le quotient de l'incertitude absolue **Δx** de cette mesure par la mesure **x** elle-même. Elle s'exprime en pourcentage (**%**) et est obtenue par la relation :

$$I_R = \frac{\Delta x}{x} \qquad (2.2)$$

Exemple

En considérant les valeurs de l'exercice précédent, on aura : $\frac{\Delta P}{P} = \frac{0{,}8}{147{,}1} = 0{,}00544 = 0{,}544\%$

2. Autres incertitudes

En outre des incertitudes vues jusqu'à présent, on distingue d'autres parmi lesquelles, l'incertitude type et l'incertitude élargie.

2.1. L'incertitude type

Soit Y une variable aléatoire du mesurage, d'espérance mathématique y_0 (approche probabiliste). Cherchons à caractériser la dispersion des valeurs que peut prendre Y.

Remarque

✍ Une mesure de cette dispersion peut être obtenue à partir de l'écart-type de la variable aléatoire Y.

✍ La détermination de l'incertitude sur le mesurage va être exprimée en fonction de l'écart-type de la variable aléatoire Y.

✍ L'essentiel de la démarche va consister à déterminer la loi de probabilité suivie par Y et à estimer la valeur de l'écart-type de Y.

Définition

L'écart-type de Y est appelé **incertitude-type** sur le résultat de la mesure et est notée **u(y)**.

Notons que, évaluer l'incertitude sur Y, va demander de combiner deux modes d'évaluation :

- L'un sur l'**analyse statistique** qu'on va appeler **évaluation de type A** ;
- L'autre sur une **modélisation probabiliste** qu'on appellera **évaluation de type B**.

2.1.1. Évaluation de type A d'une incertitude-type

Si une grandeur est estimée par les **moyens statistiques**, on dit qu'on a une **évaluation de type A** de l'incertitude sur cette grandeur.
Supposons que la grandeur **G** est estimée à partir d'une série statistique (*on établit par exemple une série de 10-mesures de la longueur d'une pièce*).

Vocabulaire

- Soit $G_i = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$, un ***n***-échantillon de G, avec G_i, la variable aléatoire associée à la $i^{ème}$ mesure de la grandeur G.
- Les ***n***-mesures $g_1, g_2, \ldots, g_n$, constituent un échantillon des valeurs prises par la grandeur G.
- La variable aléatoire

$$\overline{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_i \qquad (2.3)$$

  a pour espérance celle de G et la moyenne arithmétique des valeurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est en général, une bonne estimation de l'espérance **E(G)** de la variable **G**.
- L'**estimation ponctuelle** de G est le nombre $\overline{g}$ défini par :

$$\overline{g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i}{n} \qquad (2.4)$$

Pour une grandeur X estimée à partir de n-observations répétées indépendantes, obtenues dans les mêmes conditions de mesure $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le nombre

$$s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \qquad (2.5)$$

est la « **meilleure** » estimation de la variance de X notée **σ^2 (X)**.

- La quantité s (X) représente une estimation de la dispersion σ (X) des valeurs prises par X autour de la moyenne E(X) et est appelée **écart-type expérimental** d'une mesure ou **écart-type de répétabilité**.
- Un résultat classique de statistique sur les lois d'échantillonnage, montre que la meilleure estimation sur $\sigma^2(\overline{X})$, variance de la moyenne $\overline{X}$ de X est :

$$s^2(\overline{X}) = \frac{1}{n}s^2(X) \qquad (2.6)$$

- L'écart-type expérimental de la moyenne $s(\overline{X})$, est utilisé comme estimation de l'incertitude de la moyenne $\overline{X}$

Définition

Si une grandeur X est estimée à partir de n-observations répétées et indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors, l'incertitude-type u(x) sur son estimation $\overline{x} = \overline{g}$ est :

$$s(\overline{X}) = \sqrt{\frac{1}{n}} \times s(X) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n(n-1)}} \qquad (2.7)$$

On remarque dès lors que σ (X) est le paramètre qui caractérise la dispersion des valeurs prise par X et caractérise l'incertitude sur une mesure.

Remarque

- La formule (**2.7**) confirme l'idée selon laquelle, l'estimation à partir d'une moyenne est meilleure que sur une seule mesure.
- Si une grandeur X est estimée à partir de ***p***-observations répétées et indépendantes x_1, x_2, …, x_p et si s (X) est l'écart-type expérimental d'une mesure (obtenue auparavant à partir de ***n***-valeurs), alors, l'incertitude-type u(x) sur son estimation $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_p}{p}$ (**2.8**)

  est :

$$u(x) = \frac{s(X)}{\sqrt{p}} \qquad (2.9)$$

Exemple

On effectue deux séries de 10-mesures (en mm) de manière indépendante et on obtient le tableau (1) suivant :

L_1	52,36	52,35	52,34	52,35	52,36	52,34	52,35	52,35	52,36	52,34
L_2	59,17	59,18	59,17	59,17	59,19	59,18	59,18	59,17	59,18	59,19

Déterminer les incertitudes-types $u(L_1)$ et $u(L_2)$ des deux séries L_1 et L_2 respectivement.

- Nous allons évaluer l'incertitude-type $u(L_1)$.

- Évaluons la moyenne $\overline{x_1}$:

$$\overline{x_1} = \frac{52{,}36 + 52{,}35 + 52{,}34 + 52{,}35 + 52{,}36 + 52{,}34 + 52{,}35 + 52{,}35 + 52{,}36 + 52{,}34}{10} = 52{,}35$$

- Évaluons l'écart-type de répétabilité s (L_1) :

$$s(L_1) = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \overline{x_1}\right)^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{9}}\sqrt{6.10^{-4}} = \frac{2{,}4495.10^{-3}}{3}$$

On obtient alors, s (L_1) = 8,165.10^{-4} mm

- Évaluons alors u(L_1) : $u(L_1) = \dfrac{s(L_1)}{\sqrt{n}} = \dfrac{8{,}165.10^{-4}}{\sqrt{10}} = 2{,}582.10^{-4}$ mm.

- En procédant de la même manière pour évaluer u(L_2), on trouve :

$$u(L_2) = \frac{s(L_2)}{\sqrt{10}} = \frac{7{,}888.10^{-3}}{\sqrt{10}} = 2{,}494.10^{-3}\ \text{mm}$$

2.1.2. Évaluation de type B d'une incertitude-type

☞ Imprégnation et vocabulaire

- Lorsque l'estimation d'une grandeur X ne peut être obtenue à partir d'observations répétées, la **variance estimée $u^2(X)$** ou l'incertitude-type u (X), sont évaluées par un jugement fondé sur des **lois de probabilité** supposée auparavant.
- La détermination de la loi de l'erreur est liée à la maitrise du processus de mesure et à l'expérience de l'opérateur (expérimentateur) ; elle dépend d'un ensemble d'informations pouvant être :
  - Les résultats des mesures antérieures ;
  - L'expérience ou la connaissance du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés ;
  - Les facteurs d'influence intérieure (température, pression,….)

- Les spécifications du fabricant ;
- Les données fournies par les certificats d'étalonnage ou autres ;
- L'incertitude assignée à des valeurs de référence et donnée avec ces valeurs ;
- Etc.

- Certaines lois sont utilisées dans les calculs des incertitudes notamment les **lois normales** et les **lois rectangulaires** ou **uniformes**.
  - La loi **normale** ou **gaussienne** est centrale dans la théorie des erreurs.
  - La loi **rectangulaire** ou **uniforme** est utilisée en calcul d'incertitude, lorsqu'on ne connaît qu'une majorité de l'erreur, ce qui est souvent le cas sur les erreurs systématiques (programme de 2nde C)
    Supposons par exemple que l'erreur soit comprise entre les valeurs **a** et **b**, la loi rectangulaire sur **[a ; b]** (***elle vaut 1 entre a et b et 0 ailleurs***) est de toutes les lois définies sur ce même intervalle [a ; b], celle qui a le plus grand écart-type ; pour cela, on a la nomme le plus souvent la « **loi du pire** » en ce sens qu'on ne minimise pas l'écart-type qui caractérise l'incertitude-type.

☞ **Détermination d'incertitudes de type B**

Le travail va être de choisir, en fonction des informations recueillies ou des connaissances des processus, la loi de probabilité qui lui semble être le mieux représentative du phénomène étudié.
Ainsi, si on sait raisonnablement que les valeurs de la grandeur X sont comprises entre M – d et M + d, le choix de la loi de propagation de X entre M – d et M + d va décider de l'incertitude-type retenue :

- Si on suppose que la loi est normale, on prendra $u(x)=\frac{d}{3}$ **(2.10)**

La loi normale est une loi importante car elle se trouve entre les limites de la moyenne de variables aléatoires dans le cas de nombreuses lois, lors d'observations répétées de manières indépendantes.

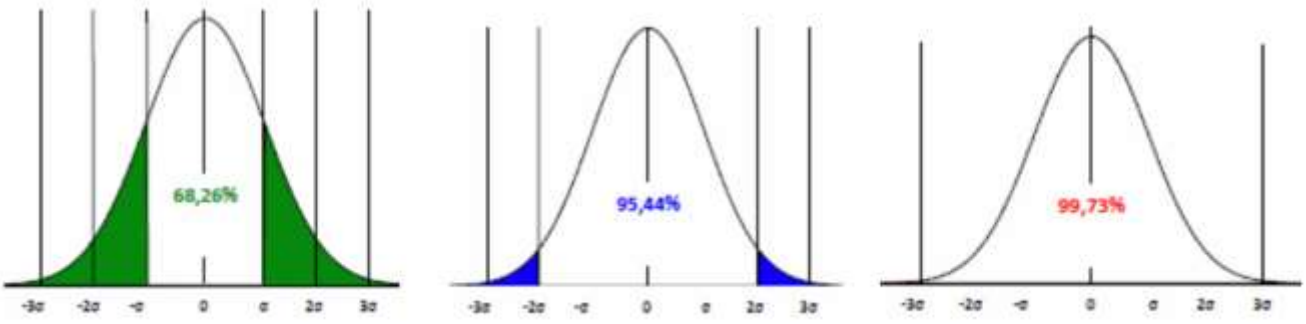

Figure 2.1 : Allure de la densité de la loi normale ou gaussienne

- Si on suppose que la loi est rectangulaire, on prendra $u(x)=\frac{d}{\sqrt{6}}$ **(2.11)**

  Une variable X suit une loi uniforme sur un intervalle [a ; b] si sa fonction de densité f est définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{Pour } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{Sinon}\end{cases} \qquad \textbf{(2.13)}$$

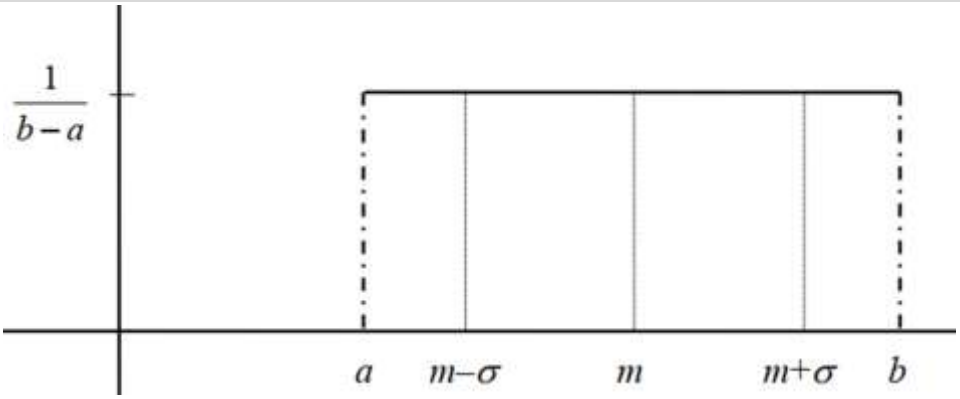

Figure 2.2 : Allure de la densité de la loi uniforme

La moyenne **m** de X et l'écart-type **σ** sont donnés par :

$$\begin{cases} m = \dfrac{a+b}{2} \\ \sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} \end{cases} \qquad (2.14)$$

- Si on suppose que la loi est rectangulaire, on prendra $u(x) = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ **(2.15)**

Une variable X suit la loi triangulaire sur un intervalle [a ; b] si sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{Si } a \le x \le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{Si } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \qquad (2.16)$$

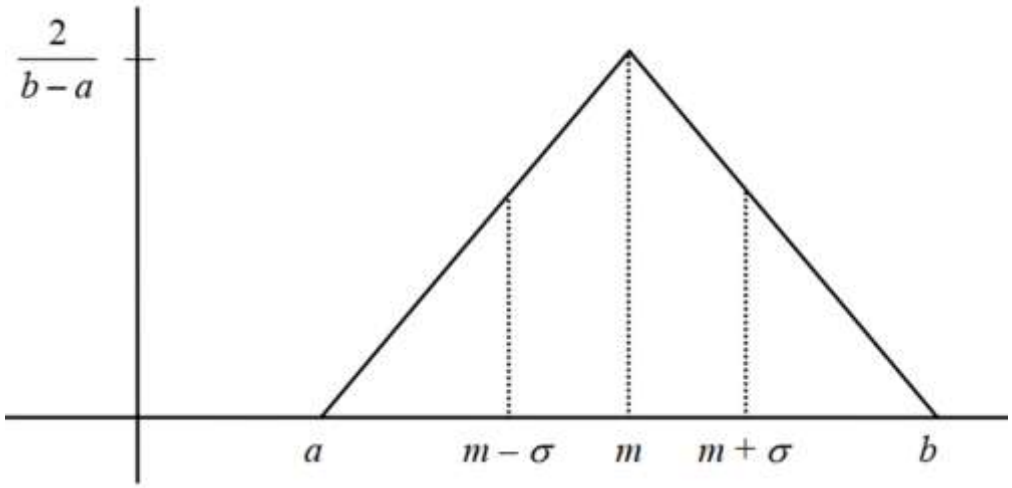

Figure 2.3 : Allure de la densité d'une loi triangulaire

La moyenne **m** de X et son écart-type **σ** sont donnés par :

$$\begin{cases} m = \dfrac{a+b}{2} \\ \sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{6}} \end{cases} \qquad (2.17)$$

☞ **Recommandations pratiques**

- **Choix des composantes de l'incertitude**

Dans la pratique il existe de nombreuses sources possibles d'incertitudes dans un mesurage, parmi lesquelles :

- La définition incomplète de la mesurande ;
- Un échantillonnage non représentatif ;
- Une connaissance insuffisante ou un mesurage imparfait des conditions d'environnement ;
- Un biais (dû à l'observateur) dans la lecture des instruments analogiques ;
- La résolution de l'instrument ;
- Des valeurs inexactes des étalons et matériaux de référence ;
- Des valeurs inexactes des constantes et paramètres retenus (obtenus par des sources extérieures par exemple) ;
- Des approximations dans la méthode de calcul des incertitudes ou dans le processus de mesure ;
- Etc.

NB

Ces sources ne sont pas nécessairement indépendantes, et certaines contribuent aux variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions identiques.

- **Incertitude-type sur une grandeur**

Le mesurage d'une grandeur Y peut être modélisé par $Y = y_0 + E_1 + E_2 + \text{---} + E_n$ où les variables E_1, E_2, …, E_n sont les différentes composantes **indépendantes** de l'erreur.
Un résultat statistique montre que :

$$u^2(Y) = u^2(E_1) + u^2(E_2) + \cdots + u^2(E_n) \qquad (2.19)$$

Supposons Y le mesurage d'une pièce dans les conditions contrôlées. On effectue une série d'observations à l'aide d'un instrument de mesure et que les composantes retenues de l'erreur amènent au calcul de :

- u_A, l'incertitude-type déterminée statistiquement sur la série des observations ;
- u_B, l'incertitude-type déterminée sur la justesse de l'instrument de mesure.

L'incertitude retenue alors sur la grandeur Y est alors :

$$u^2(Y) = u_A^2 + u_B^2 \qquad (2.20)$$

Exemple

Reconsidérons les mesures L_1 et L_2 reportées dans le tableau (1) ci-dessus. Les mesures de longueur sont effectuées à l'aide d'un pied à coulisse au 1/100 dont l'erreur de justesse maximale est de 30µm, alors, l'incertitude sur une mesure de L_1 est :

- $u_A = 0{,}00816$ mm et
- $u_B = \dfrac{0{,}030}{\sqrt{3}} = 0{,}01732$mm (instrument vérifié)

On a alors, $u^2(L_1) = u_A^2 + u_B^2 = 0{,}00036658\ldots$mm et on en déduit que $u(L_1) = 0{,}0190\ldots$mm

Remarque

L'instrument de mesure est adapté au mesurage, les erreurs attachées à la résolution de l'instrument sont prises en compte dans la variabilité des résultats des mesures sinon il faudrait prendre en compte l'erreur attachée à la résolution de l'appareil de mesure.

2.2. L'incertitude élargie

2.2.1. Présentation

- De ce qui précède, on a modélisé la mesure d'une grandeur Y comme variable aléatoire, et on a déterminé une approximation de l'écart-type de cette variable que l'on a noté $u_c(Y)$
- Notre intention en premier, est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il contienne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient raisonnablement être distribuées à la mesurande Y.
- Après l'estimation de l'écart-type de Y, il reste à exprimer la loi de probabilité suivie par cette variable.
- Idéalement, on aimerait déterminer un nombre **k** tel que si Y est estimé par y avec une incertitude $U(y) = k \times u_c(y)$ (**2.21**), alors on peut affirmer que : **$y - U(y) \leqslant Y \leqslant y + U(y)$** avec une probabilité ***p*** proche de 1.
- U(y) = U est appelée **incertitude élargie sur Y**.

2.2.2. Détermination du facteur d'élargissement k

- La détermination de **k** correspond à ce qu'on appelle en statistique la détermination d'un **intervalle de confiance** à un niveau de confiance ***p***.
- Pour obtenir le facteur k, il est nécessaire d'avoir une connaissance de la loi de probabilité de la variable représentée par le résultat de mesure.

Remarque

Dans la pratique, nous n'avons au moins qu'une approximation de cette loi et de l'écart-type associé.

- Les propriétés de la loi normale montrent que $\frac{Y - y}{u_c(y)}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $u_c(y)$ n'est pas dominée par une composante d'incertitude-type obtenue par une évaluation de type A fondées sur quels observations, ni par une composante d'incertitude-type obtenue par une évaluation de type B fondée sur moins de trois lois rectangulaires ;
- Les composantes de $u_c^2(y)$ fondées sur des lois normales sont significativement beaucoup plus grandes que toute autre composante.

- Dans le cas d'un instrument étalonné, le certificat d'étalonnage annonce une incertitude U. en réalité, U est égale à l'incertitude-type u(x) multipliée par un facteur d'élargissement k :

$$u(x) = \frac{U}{k} \qquad (2.22)$$

Remarque

- ✍ Le facteur d'élargissement devrait être précisé avec l'incertitude donnée par le constructeur.
- ✍ Si aucune précision n'est faite, on supposera k = 2.
- ✍ Pour conserver une cohérence, les incertitudes seront données avec au plus deux chiffres significatifs. Tout arrondissage des incertitudes se fera par prudence, par **excès**.
- ✍ Pour limiter le cumul d'erreurs sur les arrondis, l'arrondissage est effectué sur le résultat final. Pour les calculs intermédiaires, on pourra garder des chiffres qui peuvent ne pas être des chiffres significatifs.

Exemple

Si y = 12,3257 et u_c (y) estimé à 0,232 avec k = 2, alors, U = 0,464. L'erreur d'arrondissage devrait alors être inférieure à 0,04. On arrondit donc au 1/100 près. De ce fait, on écrira :

$$y = 12{,}32 \pm 0{,}07$$

3. Intervalle de confiance

3.1. Définition

- Selon une approche mathématique, un **intervalle de confiance** encadre une valeur réelle que l'on cherche à estimer à l'aide des mesures prises par un procédé **aléatoire**.
- En particulier, la notion d'intervalle de confiance (I_C) permet de définir une marge d'erreur entre les résultats d'un sondage et un relevé exhaustif de la population totale (approche statistique).

3.2. Principe d'un intervalle de confiance et construction

- Un intervalle de confiance doit être associé à un **niveau** en général sous la forme d'un **pourcentage**, qui minore la **probabilité** de contenir la valeur à estimer.
- Les intervalles de confiance sont souvent élaborés à partir d'un **échantillon** i.e. une série de mesures indépendantes sur une population, notamment pour estimer les **indicateurs statistiques** telles que la **moyenne m** (*ou* $\bar{x}$), la **médiane M_e** ou la **variance V**.
- Mathématiquement, un intervalle de confiance est modélisé par un **couple de variables aléatoires** qui encadrent un paramètre réel, et ne doit cependant pas être confondu avec **l'intervalle de fluctuation I_F**.
- L'intervalle de fluctuation est déterminé par le paramètre et encadre une variable aléatoire.
- Toutefois, c'est précisément en inversant les inégalités d'un intervalle de fluctuation, issu du **théorème central limite** ou de l'inégalité de **Bienaymé – Tchebychev** que l'on peut obtenir l'expression d'un intervalle de confiance, comme celui qui estime l'espérance d'une loi à partir de la moyenne empirique et d'une majoration de l'écart-type :

$$I_C(m) \in \left[\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} : \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad (2.23)$$

Cette formule (2.23) est celle de l'intervalle de confiance autour d'une moyenne $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ avec un écart-type observé sur un échantillon s de taille **n** ; t_α, le **fractile** (2) à l'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi ***St(n-1)***.

- Pour construire un intervalle de confiance, on utilise une variable aléatoire dont on connait la distribution de probabilité.

Exemple d'encadrement d'une proportion *p*

Si on cherche à évaluer quelle ***proportion p*** de la population se reconnaitrait dans une catégorie donnée (***qu'elle soit médicale, sociale, politique,…***), on peut poser la question à un nombre **n** d'individus tirés au hasard et calculer la **fréquence f** observée définie comme le quotient du nombre de réponses positives par le nombre de sondés.

La loi des **grands nombres** assure qu'il est très probable que la fréquence **f** observée soit proche de la proportion ***p***. Mais le **théorème central limite** précise que la loi de probabilité qui décrit les valeurs possibles de f est proche d'une loi normale de paramètre ***p*** et d'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (2.24)$$

Avec cette approximation, on obtient un encadrement de la forme :

$$p - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le f \le p + k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad (2.25)$$

Où k est un coefficient indépendant de n et p et qui provient des tables de la loi normale centrée réduite. Il est d'autant plus grand que l'on souhaite un niveau de confiance élevé.

Dans l'inégalité (2.25) ci-dessus, en exprimant p en fonction de f, n et k, on retrouve l'intervalle de confiance classique suivant :

$$f - k\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq p \leq f + k\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \qquad (2.26)$$

Les inégalités

$$\begin{cases} k \prec 2 \\ \sqrt{f(1-f)} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.27)$$

mènent à l'approximation par un intervalle de confiance légèrement plus grand mais à la formulation plus simple :

$$p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \qquad (2.28)$$

Principe général

Soit X une variable aléatoire de loi paramétrée par θ et X_1, …, X_n n-variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) selon la loi de X.
Plutôt que d'estimer ponctuellement la vraie valeur inconnue de paramètre θ, on recherche un intervalle recouvrant « très vraisemblablement » cette vraie valeur.

Définition

- On appelle **intervalle de confiance I_C** de niveau de confiance **1 - α** du paramètre **θ**, tout intervalle I_C tel que : $P(I_C \ni \theta) = P\left(\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ pour $\alpha \in [0, 1]$ fixé. (2.29)
- Les bornes de l'intervalle de confiance dépendent de l'échantillon, elles sont dites **aléatoires** (ou ***stochastiques***).
- Par abus de langage, on note souvent : $P(\theta \in I_C) = 1 - \alpha$.

Remarque

Si α = k (dans 2.27) augmente ou que si n augmente, l'amplitude de l'intervalle de confiance diminue.

3.3. Les types d'intervalles de confiance (vocabulaire)

La probabilité α pour que l'intervalle de confiance ne contienne pas la vraie valeur, peut être répartie différemment de part et d'autre des bornes de l'intervalle de confiance.
Soit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ où α_1 et α_2 mesurent respectivement les risques à gauche et à droite de dépasser un seuil plancher ou plafond.
Cette approche montre alors qu'il existe deux types d'intervalle de confiance :

- **L'intervalle de confiance unilatéral**
- **L'intervalle de confiance bilatéral**.

3.3.1. Intervalle de confiance unilatéral

L'intervalle de confiance est dit **unilatéral** si $\alpha_1\alpha_2 = 0$. (2.30)

- Quand on veut estimer une valeur minimale au paramètre à estimer, on considère $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_2 = 0$; l'intervalle de confiance est alors de la forme : $I_C = [a ; +\infty[$ (2.31)
- Quand on veut absolument pas dépasser un seuil maximal, on prend $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \alpha$; l'intervalle de confiance sera alors sous la forme : $I_C =]-\infty ; b]$ (2.32)

3.3.2. Intervalle de confiance bilatéral

L'intervalle de confiance est dit **bilatéral** si $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$.

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, l'intervalle de confiance bilatéral est dit **symétrique** et dans le cas contraire, il est dit **dissymétrique**.

4. Exemple de modèles utilisés en physique – chimie : Loi physique

Pour notre travaille, nous avons choisi deux lois physiques à savoir la loi d'Ohm et la loi des gaz parfaits.

4.1. Intervalle de confiance pour la loi d'Ohm

Pour cela, un rappel sur la loi d'Ohm est nécessaire :
« La différence de potentielle (ddp) U (en V) aux bornes d'un conducteur ohmique (R) de résistance R (en Ω), parcouru par un courant d'intensité I (en A) est égale au produit de la résistance R par le courant I : $U = R \times I$ ». **(2.33)**

Nous n'allons pas faire de commentaires sur cette loi car notre objectif ici est de pouvoir établir l'intervalle de confiance de l'équation (2.33). Nous allons procéder par un exemple.

En utilisant un dispositif approprié (voltmètre par exemple), on effectue 5-mesures de deux tensions u_1 et u_2 (exprimées en volts) aux bornes de deux conducteurs ohmiques de résistances respectives R_1 et R_2. Les résultats de ces mesures sont reportés sur le tableau ci-dessous :

u_1(V)	23,14	23,15	23,14	23,16	23,15
u_2 (V)	25,18	25,18	25,17	25,19	25,16

(1) Calculer les moyennes m_1 et m_2 respectives des mesures indépendantes u_1 et u_2.
(2) Calculer les écarts-types de répétabilité $S(u_1)$ et $S(u_2)$.
(3) En déduire les incertitudes-types $U(u_1)$ et $U(u_2)$.
(4) Évaluer les incertitudes U_1 et U_2 dues à l'étalonnage des instruments utilisés.
(5) Déterminer les intervalles de confiance $I_C(R)$ des résistances R_1 et R_2 si l'on suppose les distributions de probabilité être à 95% (fractile = 1,96) et le courant traversant les conducteurs ohmiques est I = 2 A.

Solution

(1) Calculons les moyennes observées m_1 et m_2.

Par définition,
$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} u_i}{5} = \dfrac{23{,}14 + 23{,}15 + 23{,}14 + 23{,}16 + 23{,}15}{5} = \dfrac{115{,}74}{5} \approx 23{,}15 \\ m_2 = \dfrac{\sum_{k=1}^{5} u_k}{5} = \dfrac{25{,}18 + 25{,}18 + 25{,}17 + 25{,}19 + 25{,}16}{5} = \dfrac{125{,}88}{5} \approx 25{,}18 \end{cases}$$

(2) Calculons les écarts-types de répétabilité $S(u_1)$ et $S(u_2)$.

Par définition,
$$\begin{cases} S^2(u_1) = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(u_i - m_1)^2 = \dfrac{(23{,}14-23{,}15)^2 + (23{,}14-23{,}15)^2 + (23{,}16-23{,}15)^2 + 0 + 0}{4} = 7{,}5.10^{-5} \\ S^2(u_2) = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{5}(u_k - m_2)^2 = \dfrac{0 + 0 + (25{,}17-25{,}18)^2 + (25{,}17-25{,}18)^2 + (25{,}16-25{,}18)^2}{4} = 1{,}5.10^{-4} \end{cases}$$

On a alors : $\begin{cases} S(u_1) = \sqrt{7{,}5.10^{-5}} = 8{,}66.10^{-3}\ V \\ S(u_2) = \sqrt{1{,}5.10^{-4}} = 1{,}2248.10^{-2}\ V \end{cases}$

(3) Déduisons-en les incertitudes-types $U(u_1)$ et $U(u_2)$

Par définition, $\begin{cases} U(u_1) = \dfrac{S(u_1)}{\sqrt{n}} = \dfrac{S(u_1)}{\sqrt{5}} = \dfrac{8{,}66.10^{-3}}{\sqrt{5}} = 2{,}24.V \\ U(u_2) = \dfrac{S(u_2)}{\sqrt{n}} = \dfrac{S(u_2)}{\sqrt{5}} = \dfrac{1{,}2248.10^{-2}}{\sqrt{5}} = 2{,}24.V \end{cases}$

(4) Évaluons les incertitudes U_1 et U_2 dues à l'étalonnage des instruments utilisés.

Par définition, $\begin{cases} U_1 = k \times U(u_1) = 2 \times 2{,}24 = 4{,}48.V \\ U_2 = k \times U(u_2) = 2 \times 2{,}24 = 4{,}48.V \end{cases}$

(5) Déterminons les intervalles de confiance $I_C(R)$ des résistances R_1 et R_2 si l'on suppose les distributions de probabilité être à 95% (fractile t = 1,96) et le courant traversant les conducteurs ohmiques est I = 2 A.

On sait par définition que,

- $m_1 - t \times \dfrac{S(u_1)}{\sqrt{5}} \leq u_1 \leq m_1 - t \times \dfrac{S(u_1)}{\sqrt{5}} \Rightarrow m_1 - t \times U(u_1) \leq R_1 \times I \leq m_1 + t \times U(u_1)$

$\Rightarrow \dfrac{m_1 - t \times U(u_1)}{I} \leq R_1 \leq \dfrac{m_1 + t \times U(u_1)}{I}$

$\Rightarrow 9{,}38 \leqslant R_1 \leqslant 13{,}77\ (\Omega)$

- De même,

$$\frac{m_2 - t \times U(u_2)}{I} \leq R_2 \leq \frac{m_2 + t \times U(u_2)}{I}$$

$\Rightarrow 10{,}79 \leqslant R_2 \leqslant 14{,}79\ (\Omega)$

4.2. Intervalle de confiance pour la loi des gaz parfaits

Une attention particulière est tenue dans cette partie.

4.2.1. Définition

Un gaz contenant **n-moles** (en mole → **mol**) de molécules à la pression **P** (en Pascal → **Pa**) occupant un volume **V** (en **m³**), à la température **T** (en Kelvin → **K**) si la loi suivante est vérifiée :

$$P \times V = n \times R \times T \qquad (2.34)$$

Remarque

- ✍ **R = 8,314 J.mol^{-1}.K^{-1} = 0,08207 L.atm.K^{-1}.mol^{-1}**, est la constante des gaz parfaits (GP)
- ✍ Pour convertir une température θ en degrés Celsius, vers une température T en degré kelvin, il suffit d'appliquer la formule suivante :

$$T = \theta + 273{,}15 \qquad (2.35)$$

- ✍ L'équation (2.34) est une autre formulation des lois de **Boyle – Mariotte** et **Gay – Lussac**.
- Si l'on effectue un processus **isobare** i.e. une **transformation à pression constante** (**P = cste**), alors, V et T varient proportionnellement et on a :

$$V/T = cste \Rightarrow V \propto T \qquad (2.36)$$

C'est la **loi de Charles**.

- Si l'on effectue un processus **isotherme** i.e. une **transformation à température constante** (**T = cste**), alors, P et V varient de façon inverse et on a :

$$PV = cste \Rightarrow P \propto V^{-1} \qquad (2.37)$$

C'est la **loi de Boyle**.

- ✍ Dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), P = 1 atm(3), T_C = 0°C. Une mole de gaz parfait à CNTP occupe un volume **V = 22,4 L**.

✍ Soit d la densité d'un gaz de masse molaire M. On a : $M = 29 \times d$ (g.mol^{-1}) **(2.38)**

Exemple

On considère un hydrocarbure de formule C_nH_{2n+2} et de densité d = 1,10 par rapport à l'air.

(1) Déterminer la masse molaire moléculaire M de cet hydrocarbure.

- Est-ce un gaz ou un liquide ? Justifier.

(2) On transforme 30 g de cet hydrocarbure en liquide sous une pression de 2 atm et le volume de liquide obtenu est de 1 m^3.

(2.1.) Quel nom donne-t-on à ce type de transformation ?

(2.2.) Déterminer la température T en kelvin puis en degré Celsius nécessaire à cette transformation. On donne : R = 8,314 J.mol^{-1}.K^{-1}.

Solution

(1) Déterminons la masse molaire moléculaire M de cet hydrocarbure si d = 1,10

On sait que : $\boxed{M = 29 \times d}$. AN : $M \approx 32$ g.mol^{-1}.

- Étant donné que la formule brute de cet hydrocarbure est C_2H_6, alors, il s'agit d'un gaz.

(2) On donne : P = 2.10^{-2} atm = 2.10^3 Pa ; m = 30 g ; V = 1 m^3.

(2.1.) Cette transformation est appelée **liquéfaction**.

(2.2.) Déterminons la température T.

D'après la loi des gaz parfaits, $PV = n \times R \times T \Rightarrow \boxed{T = \frac{P \times V}{n \times R} = \frac{P \times V \times M}{m \times R}}$ avec $n = \frac{m}{M}$

AN : T = 256,6 K = -16,55 °C. (car T (°C) = 273,15 – T(K))

4.2.2. Quelques applications

(a) Le moteur thermique

En chauffant un gaz, la pression P et le volume V augmentent ; on peut pousser ou tirer un piston ou tourner une hélice (turbine). C'est le principe de tous les moteurs thermiques (essence, gasoil, gaz, à vapeur, Stirling(4), turbine à vapeur ou à gaz, etc.).

(b) Vol d'une montgolfière (ballon à air chaud)

Présentation

Une montgolfière est un ballon souple, ouvert sur l'extérieur et qui est équipé d'un puissant brûleur à gaz qui permet de chauffer l'intérieur du ballon.

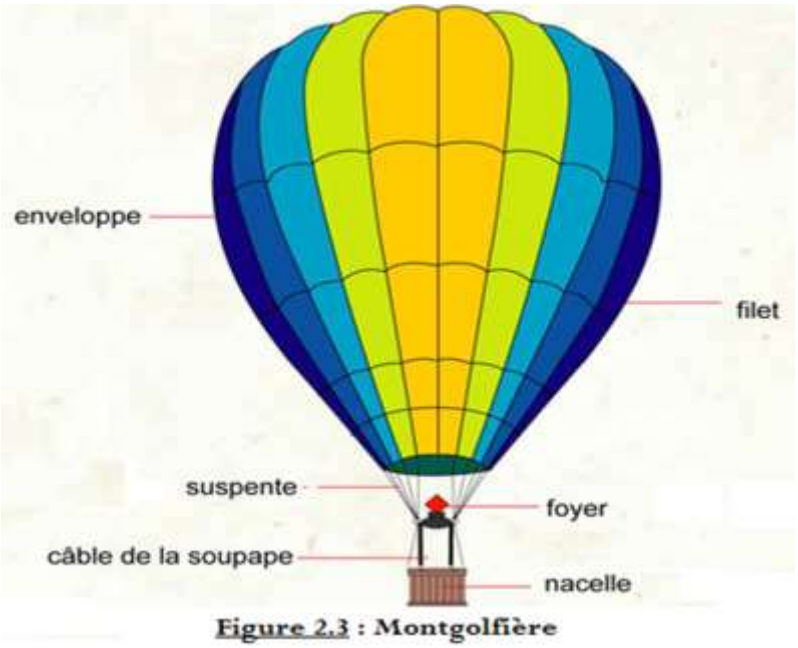

Figure 2.3 : Montgolfière

- Comme le ballon est souple, la pression intérieure P_{int} est égale à la pression extérieure P_{ext} :

$$P_{int} = P_{ext} \quad (2.39)$$

- Comme le ballon est ouvert, l'air peut entrer et sortir.
- La toile du ballon n'est pas élastique, le volume du ballon reste constant (transformation isochore) :

$$V = cste \quad (2.40)$$

- On constate alors que dans la montgolfière, seuls le nombre de moles n et la température T peuvent varier.

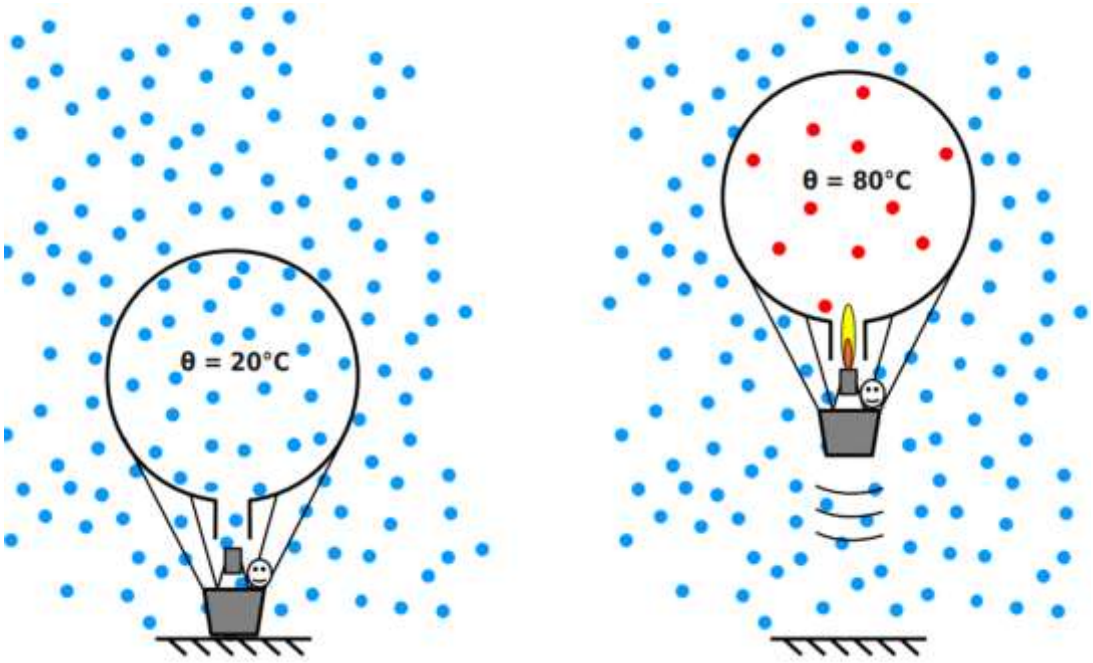

Figure 2.4 : Figures expérimentales

- Sachant que P et V sont identiques dans les deux cas de figure ci-dessus, appliquons-y la loi des gaz parfaits :

$$PV = n_1 \times R \times (\theta_1 + 273{,}15) \qquad PV = n_2 \times R \times (\theta_2 + 273{,}15) \quad (*)$$

  - On calcule la masse d'air contenue dans le ballon dans chaque cas, connaissant la quantité de matière n et la masse molaire moléculaire M_{air} de l'air :

$$m_1 = n_1 \times M_{air} \qquad m_2 = n_2 \times M_{air} \quad (2^*)$$

  (2*) dans (*) donne :

$$PV = \frac{m_1 \times R \times (\theta_1 + 273{,}15)}{M_{air}} \qquad PV = \frac{m_2 \times R \times (\theta_2 + 273{,}15)}{M_{air}} \quad (3^*)$$

  - En tirant les masses dans (3*), on obtient,

$$m_1 = \frac{M_{air} \times P \times V}{R \times (\theta_1 + 273{,}15)} \qquad m_2 = \frac{M_{air} \times P \times V}{R \times (\theta_2 + 273{,}15)} \quad (4^*)$$

  - Calculons la masse volumique ρ de l'air dans le ballon :

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{M_{air} \times P}{R \times (\theta_1 + 273{,}15)} \qquad \rho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{M_{air} \times P}{R \times (\theta_2 + 273{,}15)} \quad (5^*)$$

  - On évalue la densité d de l'air dans le ballon :

$$d = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\theta_1 + 273{,}15}{\theta_2 + 273{,}15} \approx 0{,}83$$

- Conclusion : $d = 0{,}83 < 1$, l'air chaud va flotter sur l'air froid. Donc si l'enveloppe du ballon est suffisamment légère et l'air suffisamment chaud par rapport à l'extérieur, on pourra emporter une charge plus ou moins utile.

4.2.3. Intervalle de confiance d'un GP

Nous allons procéder par un simple exercice d'échauffement.

On comprime 280 g d'un gaz parfait (GP) de densité par rapport à l'air égale à 2, dans un pneu. La pression du GP est de 3,5 bars.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

T (°C)	25	30	35	40	45	50
V (m³)						

Puis déterminer l'intervalle de confiance I_C (V) si le fractile t = 1,64.
Solution
Données : d = 2 ; m = 280 g ; P = 3,5 bars = $3,5.10^5$ Pa ; R = 8,314 $J.mol^{-1}.K^{-1}$

- Pour compléter ce tableau, les étapes suivantes sont à respecter :
- Expression du volume V en fonction de la température T :

  On sait que, pour un gaz parfait, PV = n×R×T ⇒ $V = \left(\frac{n \times R}{P}\right) \times T$

  Or $\begin{cases} n = \frac{m}{M} \\ M = 29 \times d \end{cases}$ ⇒ $V = \left(\frac{m \times R}{29 \times d \times P}\right) \times T = (1,15.10^{-4}) \times T$ (6*)

- On convertit la température du tableau en kelvin, en utilisant la formule : T(K) = 273,15 + T(°C), on obtient alors le tableau suivant :

T(°C)	25	30	35	40	45	50
T(K)	298,15	303,15	308,15	313,15	318,15	323,15

- On complète alors le tableau, en appliquant la formule (6*) ci-dessus :

T(°C)	25	30	35	40	45	50
T(K)	**298,15**	**303,15**	**308,15**	**313,15**	**318,15**	**323,15**
V (m^3) ($\times 10^{-4}$)	**342,87**	**348,62**	**354,37**	**360,12**	**365,87**	**371,62**

- Pour déterminer I_C(V), les étapes suivantes sont importantes :
- Détermination de la moyenne m sur le volume

  Par définition, $m = \frac{\sum_{i=1}^{6} V_i}{6} = \frac{(342,87 + 348,62 + 354,37 + 360,12 + 365,87 + 371,62) \times 10^{-4}}{6} = 0,036$

- Détermination de l'écart-type de répétabilité S(V).

  Par définition, $S^2(V) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (V_i - m)^2 = 1,8.10^{-6}$ ⇒ S(V) = 0,00134 m^3.

- Détermination de l'incertitude-type U(V)

  Par définition, $U(V) = \frac{S(V)}{\sqrt{n}} = \frac{0,00134}{\sqrt{6}} = 2,45.m^3$

- On a alors : $m - t \times U(V) \leq V \leq m + t \times U(V)$ ⇒ -3,982 ⩽ V ⩽4,054 (m^3)

  Étant donné que le volume ne peut être négatif, nous prendrons alors la valeur absolue de cet encadrement : **3,982 ⩽ V ⩽ 4,054** (m^3).

5. Jeu bilingue

Expression française	Expression anglaise
Incertitude absolue	**Absolute uncertainty**
Incertitude relative	**Relative uncertainty**
Écart-type	**Standard deviation**
Variance	**Variance**
Loi gaussienne	**Gaussian law**
Étalonnage	**Calibration**
Incertitude élargie	**Expanded uncertainty**
Facteur d'élargissement	**Elargement factor**
Intervalle de confiance	**Confidence interval**
Échantillon	**Sample ; specimen.**
Fractile	**Fractile**
Intervalle de confiance unilatéral	**One-sided confidence interval**
Intervalle de confiance bilatéral	**Bilateral confidence interval**
Gaz parfait	**Perfect gas**
Isochore	**Isochore**
Isobare	**Isobare**
Isotherme	**Isotherm**

Phrase

L'incertitude-type d'une grandeur étudiée est le quotient du rapport entre l'incertitude de répétabilité et la racine carrée du nombre d'observations.

Translation

The standard uncertainty of a studied quantity is the quotient of the ratio between the uncertainty of repeatability and the square root of the number of observations.

---

(1) Erreur : cette notion est divisée en erreur systématique et aléatoire (programme de 2nde C)
(2) Fractile : Valeur d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire pour laquelle une certaine fraction de l'échantillon se trouve en-dessous.
(3) Atmosphère normale : Unité de mesure de pression correspondant à la pression conventionnelle exercée par l'atmosphère terrestre au niveau de la mer. 1atm = 1,013.10^5 Pa = 1,013 bar = 760 mmHg = 760 torr.
(4) Moteur Stirling (à lire sur https://docs.google.com/presentation/d/1rUmeFTlLkuasXYal8-_nTHHXUkC9BP8AF9AgUwARO_E/edit#slide=id.i0).