

LEÇON 3 : ÉTUDE D'UNE FONCTION LOGARITHME

Objectifs pédagogiques :

- ↪ Reconnaître une fonction logarithme.
- ↪ Étudier et construire une fonction logarithme.

Pré-réquis

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln(1 - x)$.
2. Calculer $\ln 1$, $\ln e^2$.
3. Calculer la dérivée g' de g .

Correction

1. Déterminons le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \ln(1 - x)$.

$g(x)$ existe si et seulement si $1 - x > 0$ ie ssi $x < 1$. Donc $D_g =] - \infty; 1[$

2. Calculons $\ln 1$, $\ln e^2$.

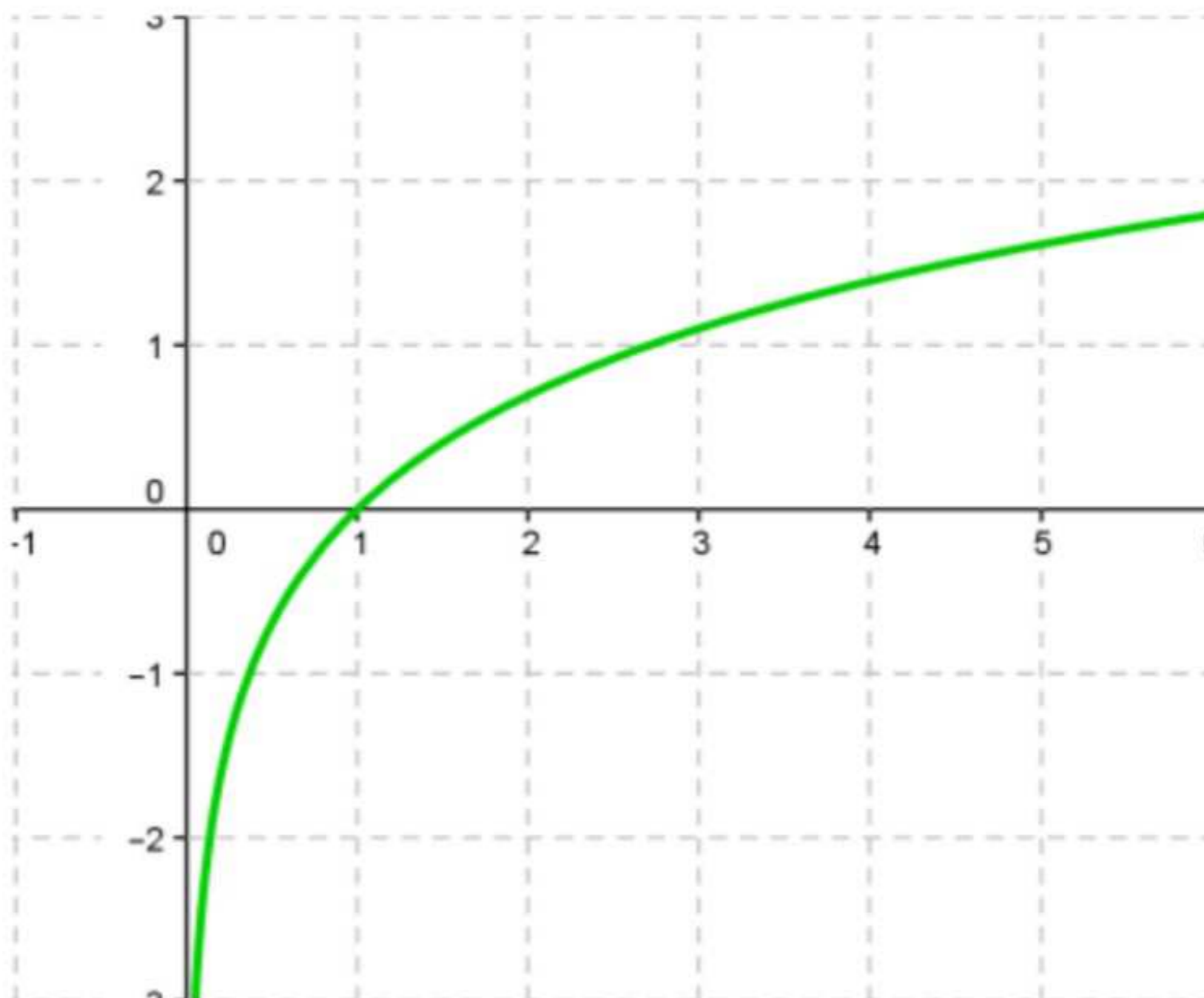
$$\ln 1 = 0, \ln e^2 = 2 \ln e = 2 \times 1 = 2$$

3. Calculer la dérivée g' de g .

g est dérivable sur $] - \infty; 1[$ et pour tout x élément de $] - \infty; 1[$, $g'(x) = \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{-1}{1-x}$.

SITUATION PROBLÈME

Atangana a entendu parler du nombre de Neper et veut trouver une valeur approchée. Dans le graphe ci-dessous aide Atangana à trouver dans quel intervalle ce nombre se trouve.



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. (a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.
(b) Déterminer le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
4. Construire (C_g) et (T) .

CORRECTION

Considérons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

1. Calculons les limites

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty.$$

2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

FIGURE 3 – Tableau de variation

3. (a) Ecrivons une équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.

$$(T) : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$$

$$= x - 1$$

Donc $(T) : y = x - 1$

(b) Déterminons le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

$$\text{On a } g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

4. Construisons (C_g) et (T) .

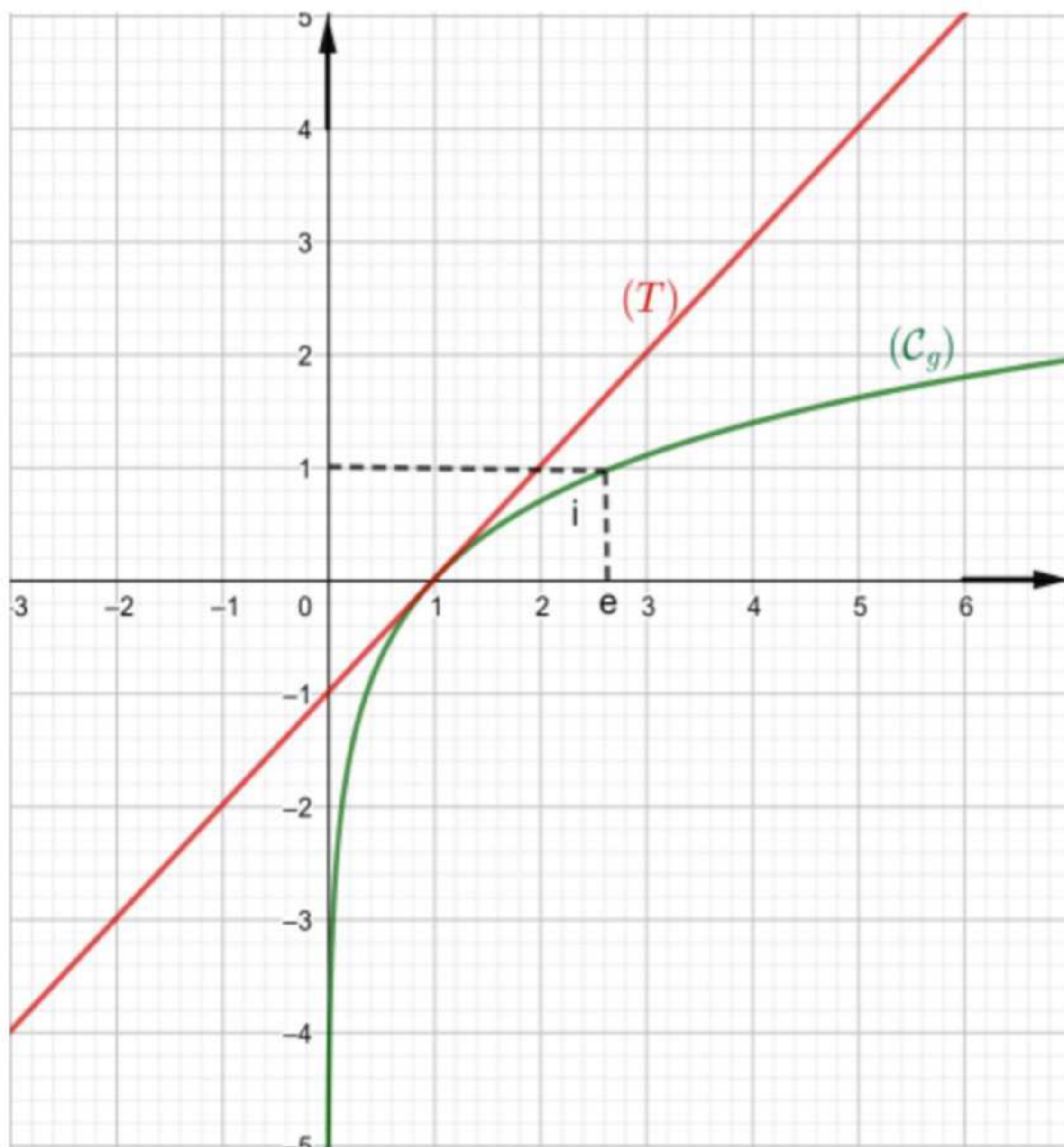


FIGURE 4 – Courbe de la fonction g

0.3. RESUMÉ

Définition 0.3.1

On appelle fonction **logarithme néperienne** la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

0.4. Étude d'une fonction Logarithme du type $\ln(ax + b)$

Exercice

Soit h la fonction définie par $h(x) = x + \ln(x - 2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de h .
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- (a) Montrer que pour tout $x \in]2, +\infty[$, $h'(x) = \frac{x-1}{x-2}$.
(b) Étudier les variations de h sur $]2, +\infty[$.
(c) Dresser le tableau de variation de h .

- (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous au 10^{ime} près

x	3	4	10	15
h(x)				

- (b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.
(c) Construction (C) et (T) .

CORRECTION

Soit h la fonction définie par $h(x) = x + \ln(x - 2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

- (a) Déterminons le domaine de définition de h .

$$D_h =]2, +\infty[$$

- (b) Calculons $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$ et donnons une interprétation géométrique du résultat. On a $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\infty$. Donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (C) en $-\infty$.

- (c) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

- (a) Montrons que pour tout $x \in]2, +\infty[$, $h'(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

$$h \text{ est dérivable sur } x \in]2, +\infty[\text{ et } \forall x \in]2, +\infty[, h'(x) = 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}.$$

- (b) Étudier les variations de h sur $]2, +\infty[$.

$$\forall x \in]2, +\infty[h'(x) > 0 \text{ donc } h \text{ est strictement croissante.}$$

(c) Dressons le tableau de variation de h .

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous au 10^{ime} près

x	3	4	10	15
$h(x)$	3	4.7	12.1	17.6

(b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

$$(T) : y = 2x - 3$$

(c) Construction (C) et (T) .

