

## LEÇON 2 : ÉTUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

### Objectifs pédagogiques :

Reconnaitre une fonction rationnelle du type  $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ .

Étudier et construire une fonction rationnelle.

### Pré-réquis

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{-2x + 1}{x - 2}$ .
- Calculer les limites de  $g$  aux bornes de son domaine de définition.
- Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ .

### Correction

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{-2x + 1}{x - 2}$ .

$$D_g = ] - \infty, 2[ \cup ] 2, +\infty[$$

- Calculer les limites de  $g$  aux bornes de son domaine de définition.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2;$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x - 2$	$-$	$0$	$+$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} -2x + 1 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty \end{array} \right.$$

- Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ .

$g$  est dérivable sur  $] - \infty, 2[ \cup ] 2, +\infty[$  et pour tout  $x$  élément de  $] - \infty, 2[ \cup ] 2, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(-2x + 1)'(x - 2) - (x - 2)'(2x + 1)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{-2(x - 2) - (-2x + 1)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

**SITUATION PROBLÈME** Pour déménager, une agence de location de véhicules propose un camion à Nyangono. Pour ce camion :

\* Nyangono loue ce camion à 8000 FCFA par heure (camion et chauffeur compris) pendant toute la durée du déménagement.

\* Nyangono recrute un certain nombre de manoeuvres qu'il paie à 2000 FCFA chacun et par heure pendant toute la durée du déménagement.

\* La durée des opérations de charge et de décharge (avant et après le voyage) est inversement proportionnelle au nombre de manoeuvres recrutés.

- \* Chaque manœuvres reçoit 2 000 FCFA par heure pendant toute la durée du déménagement.
- \* Un seul manœuvres mettrait 2 heures pour les opérations de charge et de décharge. ce camion charge met deux heures pour rejoindre le domicile de Etame. Déterminer le nombre de manœuvres pour lequel la dépense est minimale de ce camion.

### ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .  
(b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  élément du domaine de définition,  
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}.$$
  
(b) Montrer que la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 5$  est asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Trouver l'autre asymptote.  
(c) Étudier la position relative de  $(d)$  et  $(C)$ .
3. (a) Étudier les variations de  $f$  sur son ensemble de définition.  
(b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
(c) Déterminer les extremum éventuelles.  
(d) Montrer que le point  $\Omega(0, 5)$  est centre de symétrie de  $(C)$ .
4. Construire  $(C)$  et ses asymptotes.
5. Répondre à la situation problème.

### Solution

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} \text{ et } (C) \text{ sa courbe représentative.}$$

1. (a) Déterminons le domaine de définition de  $f$ .  
$$D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$
  
(b) Calculons les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et}$$
  
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$
2. (a) Déterminons les réels  $a, b$  et  $c$  tel que pour tout  $x$  élément du domaine de définition,  
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x}.$$

On a  $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{5x}{x} + \frac{4}{x} = x + 5 + \frac{4}{x}$ . Ainsi  $a = 1$ ;  $b = 5$  et  $c = 4$

- (b) Montrons que la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 5$  est asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Trouver l'autre asymptote.

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ .

Donc la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 5$  est asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

De plus donc la droite d'équation  $x$

- (c) Étudions la position relative de  $(d)$  et  $(C)$ .

En étudiant le signe de  $\frac{4}{x}$  dans un tableau de signe, on remarque que :

- $\forall x \in ]-\infty; 0[$ ,  $(C)$  est en dessous de  $(d)$ .
- $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $(C)$  est au dessus de  $(d)$ .

3. (a) Étudions les variations de  $f$  sur son ensemble de définition.

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = \frac{(2x + 5)(x) - 1(x^2 + 5x + 4)}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ .

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$  ou  $x = -2$  et on a la tableau de signe ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$

- (b) Dressons le tableau de variation de  $f$ . On a la tableau de variation suivante :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	$9$	$+\infty$	

- (c) Déterminons les extremums éventuels.

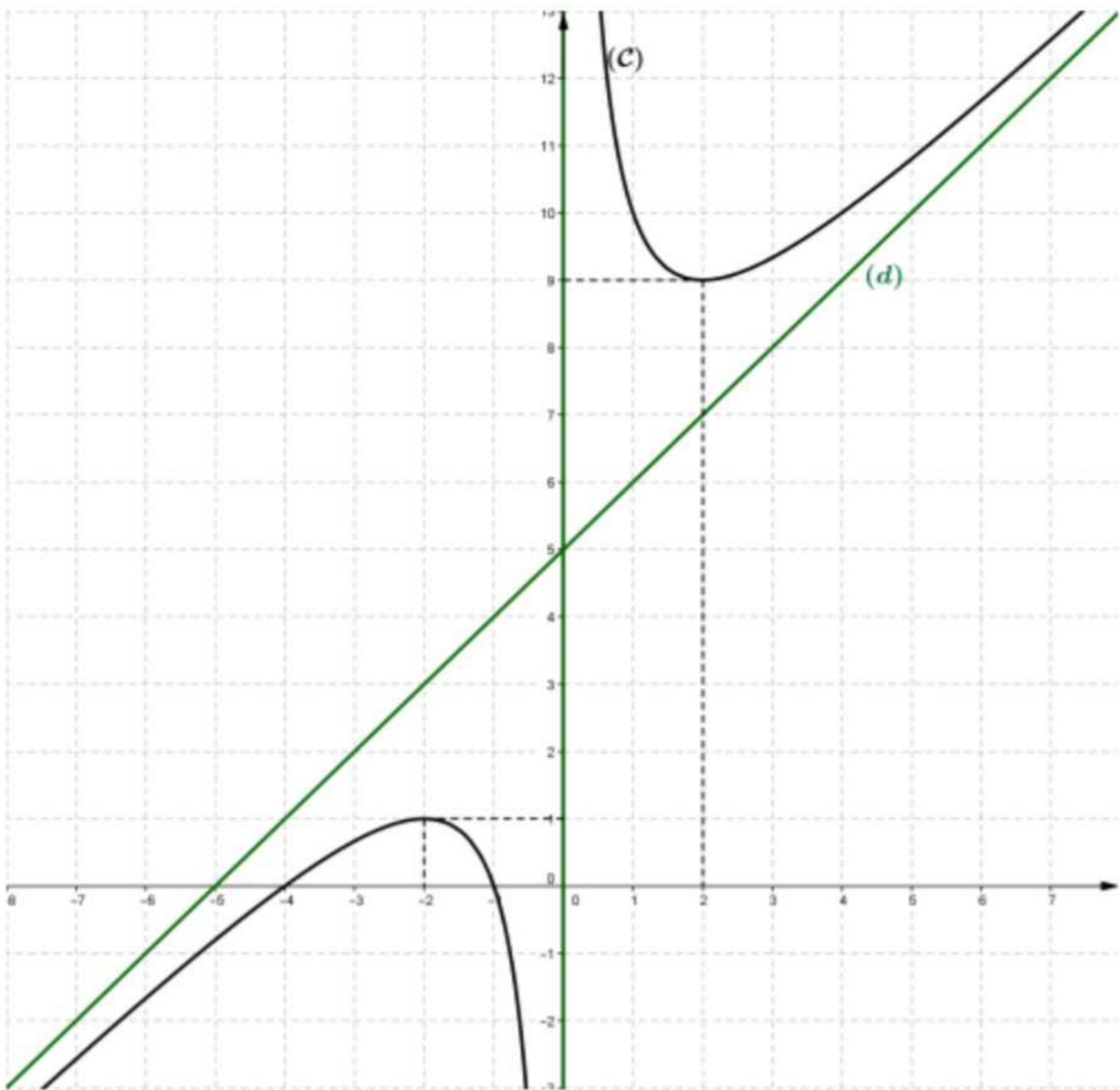
On a  $1$  comme maximum relatif atteint en  $-2$  et  $9$  comme minimum relatif atteint en  $2$ .

(d) Montrons que le point  $\Omega(0, 5)$  est centre de symétrie de  $C$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $-x \in \mathbb{R}^*$  et :

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{x^2 + 5x + 4}{x} + \frac{(-x)^2 + 5(-x) + 4}{-x} \\ &= \frac{x^2 + 5x + 4}{x} + \frac{x^2 - 5x + 4}{-x} \\ &= \frac{x^2 + 5x + 4}{x} + \frac{-x^2 + 5x - 4}{x} \\ &= \frac{10x}{x} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Donc le point  $\Omega(0, 5)$  est centre de symétrie de  $(C)$ .

4. Construisons  $(C)$  et ses asymptotes.



5. Répondons à la situation problème.

désignons par  $x$  le nombre de manœuvres et par  $h(x)$  la fonction qui  $x$ (le nombre de manœuvres) associe la somme à payer pour le déménagement. c'est-à-dire  $f(x) =$  montant de la location + le montant à payer aux manœuvres. Si on désigne par  $t$ (en heure) la durée de charge et de décharge du camion.

Puis le camion met 2 heures, on a comme montant de location est  $8000(t + 2)$ , et la durée d'opération d'un manœuvre étant de deux heures, le montant à payer aux manœuvres sera  $2000x(t + 2)$ . Or  $\frac{t}{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{x}$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= 8000(t + 2) + 2000x(t + 2) \\
 &= (t + 2)(2000x + 8000) \\
 &= \left(\frac{2}{x} + 2\right)(2000x + 8000) \\
 &= \frac{(2 + 2x)(2000x + 8000)}{x} \\
 &= \frac{4000x + 16000 + 4000x^2 + 16000x}{x} \\
 &= \frac{4000x^2 + 20000x + 16000}{x} \\
 &= \frac{4000(x^2 + 5x + 4)}{x}
 \end{aligned}$$

En considérant le tableau ci-dessous, on constate que la valeur minimale est atteinte pour  $x = 2$ . On conclut que le nombre manœuvres est 2.

## RESUMÉ

## 0.2. Fonction rationnelle

### Définition 0.2.1

Toute expression de la forme  $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  où  $a, b, c, d, e$  sont des réels est appelée **Fonction rationnelle**.

## EXERCICE D'APPLICATION

### Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$  et  $(C_g)$  sa courbe représentative.

- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de  $g$ .
  - Trouver l'asymptote éventuelle.
  - Montrer que  $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$  pour tout  $x \neq -1$

- (d) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $(C_g)$ .
2. (a) Étudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.  
(b) Écrire une équation de la tangente à  $(C_g)$  au point d'abscisse 0.  
(c)  $g$  admet-elle des extremums relatifs ?
3. (a) Déterminer les points de rencontre de la courbe avec les axes de coordonnées.  
(b) Construire  $(C_g)$  avec ses asymptotes et sa tangente.

## Exercice 2