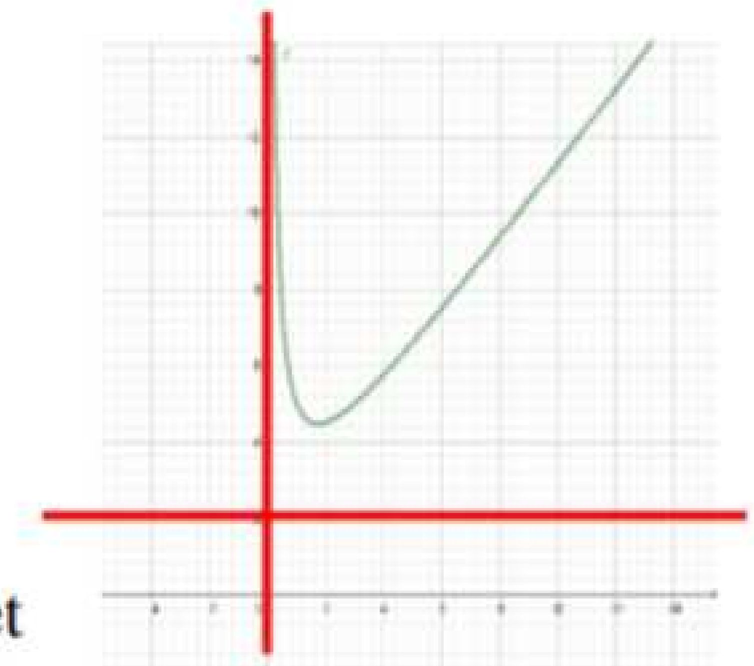
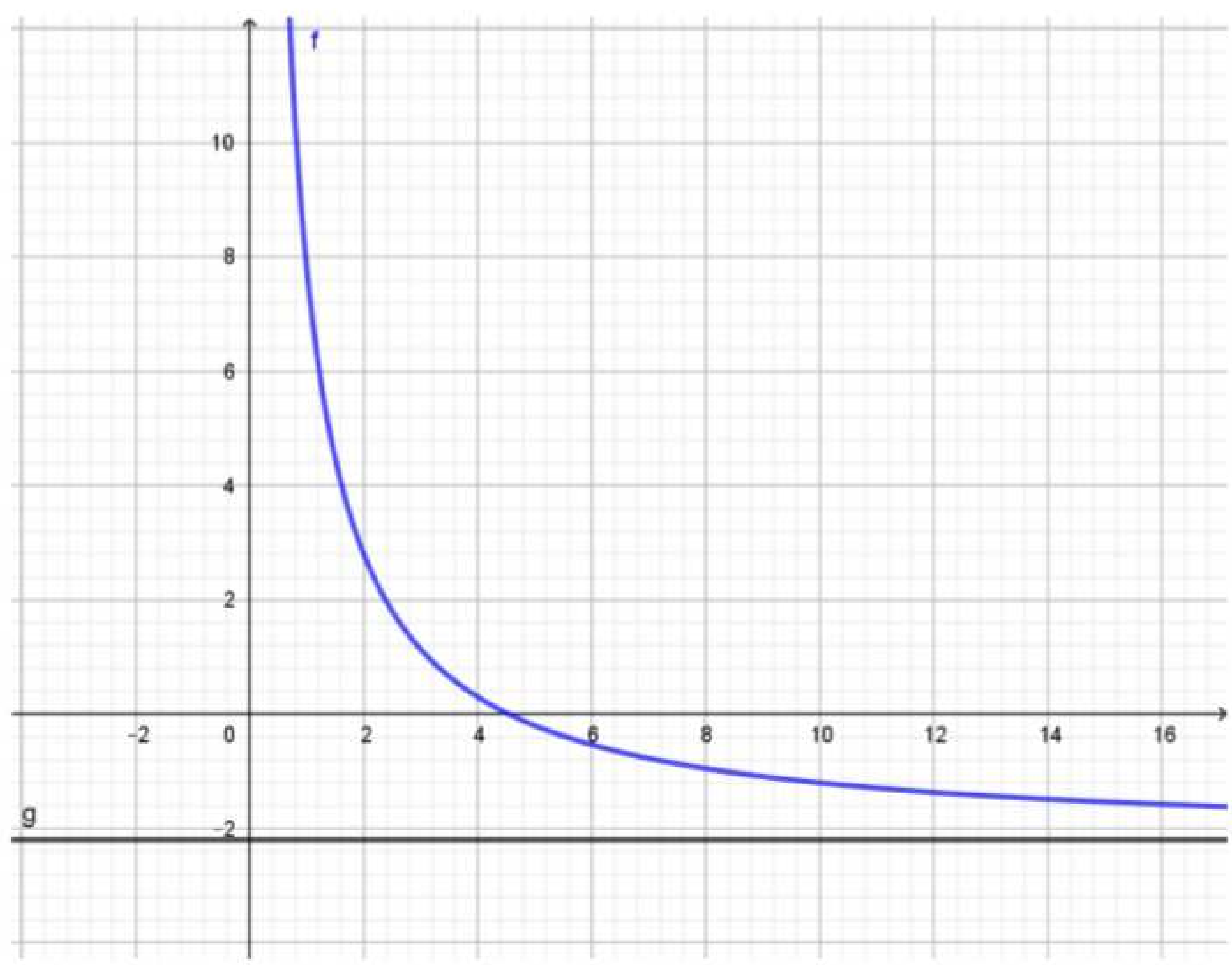
LEÇON 3: ASYMPTOTE. *DUREE : 100 MINUTES*

OBJECTIFS PEDAGOFIQUE : Au terme de la leçon, l'apprenant doit être capable de conjecturer à partir d'une courbe, les asymptotes éventuelles ; et justifier qu'une droite d'équation donnée est asymptote à la courbe d'une fonction.



PRE-REQUIS : Donner les limites à droite de zéro et en $+\infty$ de la fonction ci-contre. Puis trace sur la figure les droites d'équation $x = 0$ et $y = 1$.

……… $+\infty$ $et +\infty$.



SITUATION PROBLEME :

Motaze est un élève de la Tle A4. Passionné d'économie, il a tracé la courbe ci-contre, représentant le taux de variation annuel en % du salaire $h(x)$, en fonction du taux de chômage x. Il aimerait étudier le taux annuel du salaire lorsque le taux de chômage diminue ou lorsqu'il augmente. Comment peut-il faire cette étude et donner une conclusion à cette étude ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE:

1- Observe la courbe ci-dessus.

a) Quelle est la limite de h, lorsque x prend tend vers l'infini. Que peut-on dire de la droite d'équation y= -2,2 ? ….. $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -2{,}2$. On peut dire que cette droite est une asymptote horizontale par rapport à la courbe.

b) Quelle est la limite de h, lorsque x tend vers 0 ? que peut-on dire de la droite d'équation $x = 0$? $\lim_{x\to 0>} h(x) = +\infty$. On peut dire que cette droite est une asymptote verticale à la courbe.

2- On suppose que $h(x) = \frac{10}{x} - 2{,}2$.

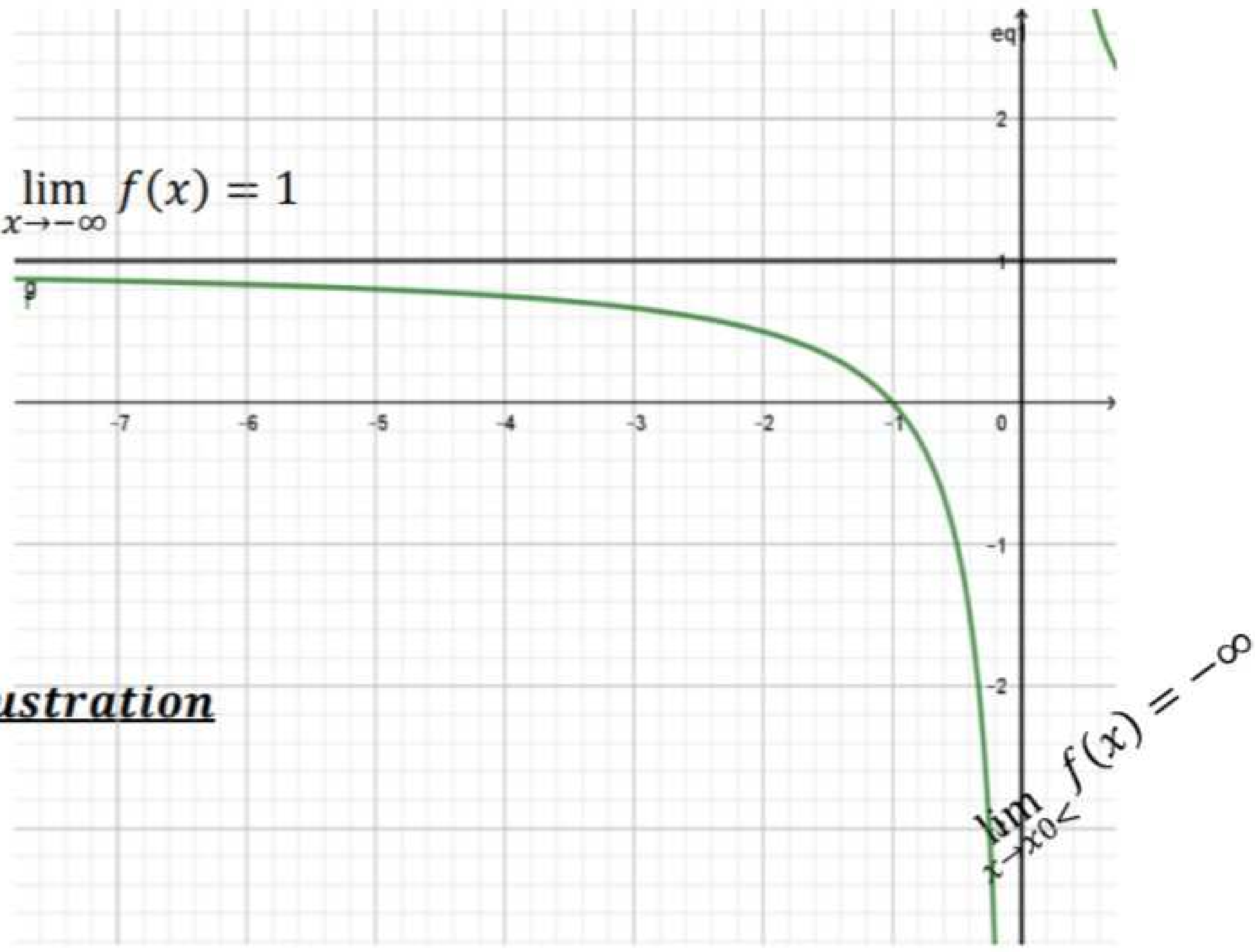
a) Calculer la limite de h en 0 par valeurs supérieures.… … $\lim_{x\to 0>} h(x) = \lim_{x\to 0>} \frac{10}{x} - 2{,}2 = \frac{10}{0^+} - 2{,}2 = +\infty$.

b) Calculer la limites de h en $+\infty$. … … $\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to 0>} \frac{10}{x} - 2{,}2 = \frac{10}{+\infty} - 2{,}2 = 0 - 2{,}2 = -2{,}2$.

RESUME :

F est une fonction, $x0$ et y_0 des nombres réels, et (D) une droite.

- Si $\lim_{x\to x0>} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to x0<} f(x) = \pm\infty$, alors la droite (D) : $x = x0$ est une **asymptote verticale** à la courbe de .
- Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = y_0$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = y0$, alors la droite (D’) : $y = y0$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f .



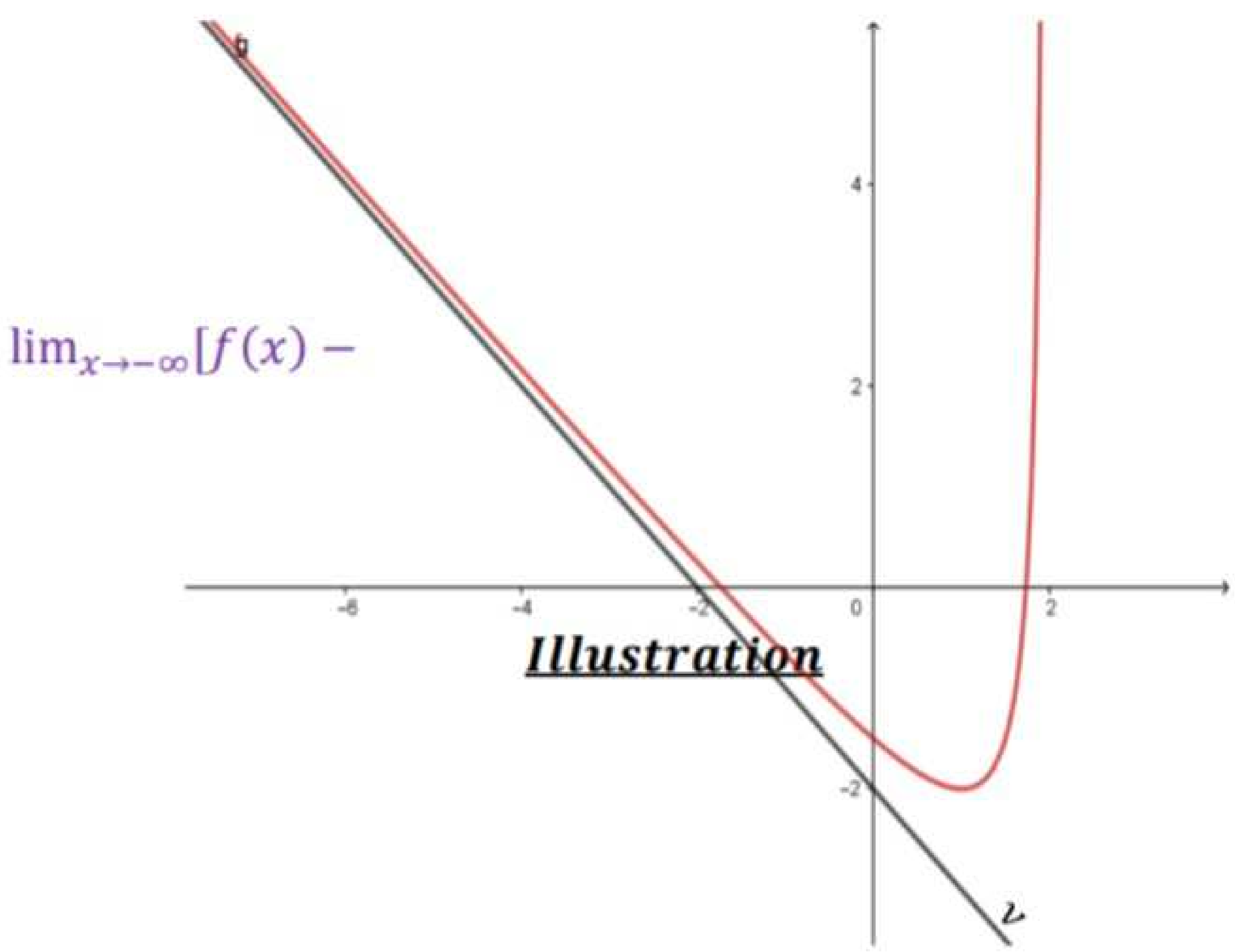
Illustration

- Si $\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - \quad (ax + b)] = 0$, alors la droite (D) : $y = ax + b$ est **une asymptote oblique** à la courbe de f.

De manière générale, si f est une fonction définie au voisinage de l’infinie, vérifiant

$f(x) = ax + b + h(x)$, avec $\lim_{x\to \pm\infty} h(x) = 0$, alors la droite

(D) : $y = ax + b$ est **une asymptote oblique** à la courbe de f



Illustration

EXERCICE D’APPLICATION :

On définit la fonction f par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$.

1- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis en déduire les asymptotes éventuelles.

2- Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b\frac{c}{x+1}$.

3- En déduire l’équation de l’asymptote oblique.